Problème 9. On a

$$\sum_{k=0}^{N^3} \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor = N(N^3+1) - \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$$

Commençons par faire un dessin. Et remarquons que la somme

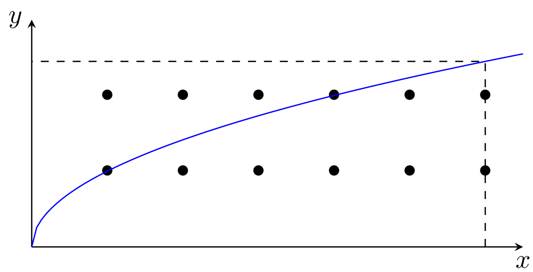

Figure 1 – Graphe de la fonction $x \to \sqrt{x}$

$$\sum_{k=1}^{N^3} \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor$$

Correspond exactement au nombre de points à coordonnées entières en dessous du graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et dans le carré $]0, n^3] \times]0, n]$. On se propose de compter le nombre de points a coordonnées entières en décomposant notre dessin de la façon suivante

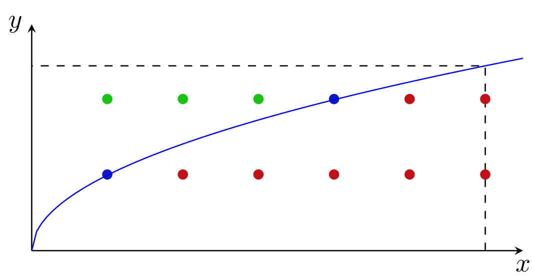

Figure 2 – Graphe de la fonction $x \to \sqrt{x}$

Notons

$$\Gamma = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in]0, n]\}, \quad \Gamma^+ = \{(x, y) \mid x \in]0, n],\ x \leq y \leq n\}, \quad \Gamma^- = \{(x, y) \mid x \in]0, n],\ 0 < y \leq x\}$$

et

$$R =]0, n] \times \left]0, \sqrt{n}\right].$$

Puis notons le cardinal des points à coordonnées entières dans chacune des régions :

$$\gamma = \text{Card}\left(\Gamma \cap \mathbb{Z}^2\right), \quad \gamma^+ = \text{Card}\left(\Gamma^+ \cap \mathbb{Z}^2\right), \quad \gamma^- = \text{Card}\left(\Gamma^- \cap \mathbb{Z}^2\right),$$

et

$$r = \text{Card}\left(R \cap \mathbb{Z}^2\right).$$

Nous avons alors

$$r = \gamma^+ + \gamma^- - \gamma$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor = \gamma^- = r - \gamma^+ + \gamma.$$

Lemme. On a

$$r = n^4, \quad \gamma = n.$$

Démonstration. On a

$$r = \mathrm{Card}\left([\![1, n^3]\!] \times [\![1, n]\!]\right) = n^4.$$

De plus,

$$\gamma = \mathrm{Card}\left(\Gamma \cap \mathbb{Z}^2\right) = \mathrm{Card}(\{(k^3, k) \mid 1 \leq k \leq n\}) = n.$$

□

Lemme. On a

$$\gamma^+ = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Démonstration. La dernière est plus délicate. En fait, il s'agit de compter horizontalement plutôt que verticalement. On a

$$\gamma^+ = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

□

Il vient donc finalement la formule annoncée.