Problème 8. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs définie par

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{si } \sqrt{a_n} \in \mathbb{N}, \\ a_n + 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\operatorname{Card}\{n \mid a_n = 3\} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad a_0 \equiv 0 \pmod 3.$$

Démonstration. Commençons par deux observations importantes :

1. $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^2 \not\equiv 2 \pmod 3$$

   en effet, en écrivant les possibilités, on a

$k \equiv$	0	1	2
$k^2 \equiv$	0	1	1

   $\pmod 3$.

2. Si $a_0 \equiv 0 \pmod 3$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv 0 \pmod 3$. Et si $a_0 \not\equiv 0 \pmod 3$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \not\equiv 0 \pmod 3$. Ces deux résultats s'obtiennent de la table des modulos précédents et en remarquant que $a_n + 3 \equiv a_n \pmod 3$.

Faisons maintenant la preuve.

$\Rightarrow$ On procède par contraposée. Si $a_0 \not\equiv 0 \pmod 3$ alors $a_n \not\equiv 3$ et $\operatorname{Card}\{n \mid a_n = 3\} = 0$.

$\Leftarrow$ Supposons $a_0 \equiv 0 \pmod 3$ et posons $m \in \mathbb{N}$ tel que $m := \min\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Il est clair que m n'est pas un carré (sinon, le terme qui suit $a_n = m$ serait $a_{n+1} = \sqrt{m} < m$), donc le prochain carré rencontré dans la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après le terme $a_n = m$ sera un des trois entiers suivants

$$\left(\lfloor\sqrt{m}\rfloor + 1\right)^2, \quad \left(\lfloor\sqrt{m}\rfloor + 2\right)^2 \quad \text{ou} \quad \left(\lfloor\sqrt{m}\rfloor + 3\right)^2$$

Par minimalité de m, on sait que

$$m \leq \lfloor\sqrt{m}\rfloor + 3 < \sqrt{m} + 3$$

Or,

$$m - \sqrt{m} - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < 5.$$

Faisons une disjonction de cas pour chacun des entiers possibles.

1. Si $m = 0$ (*resp.* $m = 1$), alors clairement $a_n = 0$ (*resp.* $a_n = 1$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit $a_0 > 1$.
2. Les cas $m = 2$ et 4 ne vérifient pas $a_n \equiv 0 \pmod 3$.

Donc $m = 3$. Or, s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_N = 3$ alors

$$a_{N+1} = 6, \quad a_{N+2} = 9 \quad \text{et} \quad a_{N+3} = 3$$

et la suite devient périodique après le rang N. Finalement

$$\operatorname{Card}\{n \mid a_n = 3\} = \infty.$$

□

En fait, notre preuve donne même une meilleure compréhension de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: soit elle est ultimement périodique soit elle est ultimement arithmétique.