**Problème 4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $m$ tel que $2^m = \overline{n\ldots}^{10}$.

Commençons par traduire plus explicitement cette proposition en écrivant la condition $2^m = \overline{n\ldots}^{10}$ de manière équivalente

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad n10^k \leq 2^m < (n+1)10^k.$$

Passons alors au logarithme en base 10 pour obtenir

$$\log(n) + k \leq m\log(2) < \log(n+1) + k$$

ou encore

$$\log(n) \leq m\log(2) - k < \log(n+1).$$

On se propose alors d'utiliser le théorème d'approximation de Dirichlet :

**Lemme** (Approximation de Dirichlet)**.** Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $p$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$0 < |q\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

Laissons la preuve de ce résultat pour l'instant et terminons la preuve de notre problème.

*Démonstration.* Commençons par montrer que le réel $\log(2)$ est irrationnel. Supposons par l'absurde qu'il existe $p$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\log(2) = \dfrac{p}{q}$. Alors, en utilisant que $\log(10) = 1$, on peut écrire

$$p\log(2) = q\log(10) \quad \Leftrightarrow \quad \log(2^p) = \log(10^q)$$

et par injectivité, cela donne $2^p = 10^q$. Or $5 \mid 10$ mais $5 \nmid 2$, ce qui contredit l'égalité.

En utilisant le théorème d'approximation de Dirichlet, on obtient alors que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \exists p, q \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < |q\log(2) - p| < \frac{1}{N}.$$

Un corollaire assez immédiat est donc que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \exists p, q \in \mathbb{N}^*, \quad x < |q\log(2) - p| < y$$

et en prenant $x = \log(n)$ et $y = \log(n+1)$ on obtient qu'il existe $m, k \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\log(n) \leq m\log(2) - k < \log(n+1).$$

$\square$

Faisons quand même la preuve du théorème d'approximation de Dirichlet.

*Démonstration.* Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'application

$$\varphi : \mathbb{N} \to [\![0, N-1]\!], \quad k \mapsto \max\left\{\ell \in [\![0, N-1]\!] \mid \frac{\ell}{N} < \{k\alpha\}\right\}$$

Par le principe des tiroirs, on sait alors qu'il existe $i$ et $j$ deux entiers tels que

$$0 < \{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \frac{1}{N}$$

et en écrivant que $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ on obtient

$$0 < i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor - (j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor) < \frac{1}{N}$$

ou encore

$$0 < (i-j)\alpha - (\lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor) < \frac{1}{N}$$

et en posant $p = \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor$ et $q = i - j$ on obtient bien le résultat annoncé (pour obtenir la valeur absolue, on échange simplement le rôle de $i$ et $j$). $\square$