

Problème 3. On a

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(k+2)} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

dont on déduit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(k+2)} = 1.$$

Démonstration. Il s'agit d'une simple récurrence. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!(k+2)} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(k+2)} + \frac{1}{(n+1)!((n+1)+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+3)} \quad (\text{H.R.}) \\ &= 1 - \frac{n+3}{(n+3)!} + \frac{n+2}{(n+1)!(n+2)(n+3)} \\ &= 1 - \frac{n+3-(n+2)}{(n+3)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+3)!}. \end{aligned}$$

□