Problème 13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et de coefficient dominant $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Alors, il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que
$$|P(k)| \geq |\alpha| \frac{n!}{2^n}.$$

On va utiliser l'application linéaire
$$\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad P \mapsto \Delta P$$
avec $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$.

Lemme. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ a degré n alors ΔP a degré $n-1$.

De plus, si le coefficient dominant de P est α, celui de ΔP est $n\alpha$.

Démonstration. Il suffit d'écrire explicitement. Soit
$$P = \alpha X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$$
on a
$$\begin{aligned}
\Delta P &= P(X+1) - P(X) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_k \binom{k}{i} X^i
\end{aligned}$$
On a bien que ΔP est de degré $n-1$ et son coefficient dominant est $\alpha_n \binom{n}{n-1} = n\alpha_n$. $\square$

On peut alors prouver par récurrence la proposition.

Démonstration. Supposons que la proposition soit vraie au rang $n-1$. Et soit P un polynôme de degré n et de coefficient dominant α. Alors, puisque ΔP est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $n\alpha$, on a
$$\exists 0 \leq k \leq n-1, \quad |\Delta P(k)| \geq |n\alpha| \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} = |\alpha| \frac{n!}{2^{n-1}}.$$
Maintenant, il suffit de remarquer que
$$|\Delta P(k)| = |P(k+1) - P(k)| \leq |P(k+1)| + |P(k)| \leq 2 \max\{|P(k+1)|, |P(k)|\}.$$
On obtient en combinant les deux inégalités que
$$\max\left(|P(k+1)|, |P(k)|\right) \geq |\alpha| \frac{n!}{2^n}$$
ce qui permet d'affirmer que
$$\exists 0 \leq k \leq n, \quad |P(k)| \geq |\alpha| \frac{n!}{2^n}.$$
$\square$

Lemme. La borne $|\alpha| \frac{n!}{2^n}$ est optimale.

Démonstration. Pour montrer qu'elle est optimale, il suffit de montrer qu'il existe des polynômes P_n de degré n et de coefficient dominant α_n qui vérifient

$$\max_{0\leq k\leq n} |P(k)| = |\alpha_n|\frac{n!}{2^n}.$$

Pour cela, utilisons les polynômes interpolateurs de LAGRANGE pour construire P_n de degré n tel que

$$P_n(k) = (-1)^k.$$

On a alors

$$P_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(X-i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(i-k)}$$

il est assez facile de voir que

$$(-1)^k \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(i-k) = k!(n-k)!$$

On en déduit que le coefficient dominant de P_n est

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}.$$

On a alors

$$n!\alpha_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

Finalement, on a par construction

$$\forall 0\leq k\leq n, \quad |P_n(k)| = 1$$

et

$$|\alpha_n|\frac{n!}{2^n} = \frac{2^n}{n!}\frac{n!}{2^n} = 1.$$

Ce qui montre bien la maximalité de la borne. $\square$