Problème 12. On a
$$\sum_{k=2}^{n} k! = N^3 \quad \Leftrightarrow \quad n = 3.$$

On utilise un lemme astucieux pour montrer ce résultat.

Lemme. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^3 \equiv -1, 0, 1 \pmod 7$$

Démonstration. Le petit théorème de Fermat affirme que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 7 \mid n^7 - n$$

or
$$n^7 - n = n(n^3 - 1)(n^3 + 1).$$

Donc,

1. soit $7 \mid n$ et dans ce cas $n^3 \equiv 0 \pmod 7$,
2. soit $7 \mid n^3 - 1$ et $n^3 \equiv 1 \pmod 7$,
3. soit $7 \mid n^3 + 1$ et $n^3 \equiv -1 \pmod 7$.

$\square$

Remarque. Évidemment, on pouvait calculer les cubes de $0, \ldots, 6$ et conclure :
$$0^3 \equiv 0 \pmod 7, \quad 1^3 \equiv 1 \pmod 7, \quad 2^3 \equiv 1 \pmod 7, \quad 3^3 \equiv -1 \pmod 7$$
$$4^3 \equiv 1 \pmod 7, \quad 5^3 \equiv -1 \pmod 7, \quad 6^3 \equiv -1 \pmod 7.$$

On peut donc maintenant démontrer notre proposition.

Démonstration. Il est clair que
$$\forall n \geq 6, \quad \sum_{k=2}^{n} k! \equiv \sum_{k=2}^{6} k! \pmod 7.$$

En calculant les sommes pour $n = 2, \ldots, 6$, on a
$$\sum_{k=2}^{2} k! \equiv 2 \pmod 7, \quad \sum_{k=2}^{3} k! = 8 \equiv 1 \pmod 7, \quad \sum_{k=2}^{4} k! = 32 \equiv 4 \pmod 7,$$
$$\sum_{k=2}^{5} k! = 152 \equiv 5 \pmod 7 \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{6} k! = 872 \equiv 4 \pmod 7.$$

Le seul candidat est donc $n = 3$ et on peut facilement trouver
$$\sum_{k=2}^{3} k! = 8 = 2^3.$$

$\square$

Source : https://www2.math.binghamton.edu/p/pow/fall_2024