Problème 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$s_n = \sum_{\substack{k=1\\k\wedge n=1}}^{n} k \quad \text{et} \quad t_n = \sum_{\substack{k=1\\k\wedge n\neq 1}}^{n} k$$

Alors

$$n \mid s_n - t_n \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 1 \mod 2$$

Démonstration. On commence par remarquer que

$$n \wedge k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \wedge (n-k) = 1$$

en particulier on peut écrire

$$s_n = \sum_{\substack{k=1\\k\wedge n=1}}^{n} k = \sum_{\substack{n-k=1\\(n-k)\wedge n=1}}^{n} n-k = \sum_{\substack{k=1\\k\wedge n=1}}^{n} n-k.$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned}
s_n - t_n &= \sum_{\substack{k=1\\k\wedge n=1}}^{n} n-k - \sum_{\substack{k=1\\k\wedge n\neq 1}}^{n} k \\
&= \sum_{\substack{k=1\\k\wedge n=1}}^{n} n - \sum_{\substack{k=1\\k\wedge n=1}}^{n} k - \sum_{\substack{k=1\\k\wedge n\neq 1}}^{n} k \\
&= n \sum_{\substack{k=1\\k\wedge n=1}}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} k \\
&= n\varphi(n) - \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

où

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{k=1\\k\wedge n=1}}^{n} 1$$

est la fonction appelée indicatrice d'Euler. En particulier, puisque $n \mid n\varphi(n)$, on obtient que n divise $s_n - t_n$ si, et seulement si, n divise $\frac{n(n+1)}{2}$. Cette dernière condition est clairement équivalente à ce que $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que n soit impair. $\square$