Problème de modules, structures complexes et espace de Kuranishi

Théo JAMIN

14 février 2022

Laboratoire angevin de recherche en mathématiques – Université d'Angers

Plan

- **Problème de modules,**
- **Cas des variétés complexes compactes,**
- **Espace de Kuranishi.**

Problème de modules

Question centrale

Problème de modules :

Classifier des objets et comprendre leur **variations**.

Un **problème de modules** est la donnée de :

- Une classe d'objets,
- Une relation d'équivalence,
- Comment autorise t-on les objets à varier.

Solution géométrique

Une **solution géométrique** à un problème de module c'est un **espace de module** $\mathscr{M}$ dont

- **Les points** de $\mathscr{M}$ correspondent aux objets,
- **Les propriétés géométriques** de $\mathscr{M}$ correspondent aux propriétés des variations.

Exemples

- Classification des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^2$.

$$\mathscr{M} = \mathbb{RP}^1$$

- Classification des sous-espaces de dimension k dans un espace vectoriel V.

$$\mathscr{M} = Gr(k, V)$$

Du global au local

Certains problèmes de modules **n'admettent pas** d'espace de module dans une catégorie donnée.
Dans ce cas, on peut :

- **Ajouter de la structure** aux objets pour limiter les variations.
  Marquage de points, stabilité, etc.
- **Élargir la catégorie** dans laquelle on construit l'espace de module.
  Espaces analytiques, champs algébriques/analytiques, etc.
- Ne construire "qu'un" **espace de module local**.
  Ne regarder que les objets proches d'un objet particulier.

Cas des variétés complexes

Géométrie différentielle

Variété différentiable compacte

"Une **variété différentiable** compacte est obtenue en recollant un nombre fini d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ par des **difféomorphismes**."

Variété complexe compacte

"Une **variété complexe** compacte est obtenue en recollant un nombre fini d'ouverts de $\mathbb{C}^n$ par des **biholomorphismes**."

Géométrie complexe

Structure presque complexe

Une **structure presque complexe** sur une variété différentiable est la donnée d'une structure d'espace vectoriel complexe sur chaque espace tangent qui varie de façon lisse sur la variété.

C'est un endomorphisme J sur chaque espace tangent tel que $J^2 = -Id$.

Théorème de Newlander-Niremberg

Une **variété différentielle** munie d'une structure presque complexe vérifiant une condition d'intégrabilité [1] est une variété complexe.

1. $[JX, JY] = J[JX, Y] + J[X, JY] + [X, Y]$, X, Y champs de vecteurs.

Problème de modules de structures complexes

On regarde le problème de module suivant : On se donne une variété complexe X et on veut construire un **espace de modules des structures complexes** sur X. On a le problème de modules suivant :

- Les objets : **structures complexes** sur X,
- La relation d'équivalence : **biholomorphismes** de X,
- Variations : **difféomorphismes** de X.

Difficultés

Construire un tel espace dans la catégorie des variétés complexes est souvent impossible, même dans une catégorie plus grande ce n'est pas toujours possibles.
On a donc recours à la théorie locale.

Déformations de structures complexes

Déformation de structures complexes

Soit X une variété complexe compacte.
Une **déformation** de X est
la donnée de $p : \mathscr{M} \longrightarrow B$ un morphisme lisse et propre entre deux variétés complexes $\mathscr{M}$ et B[2].

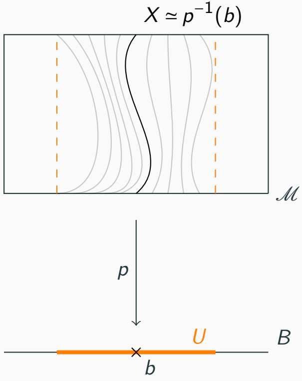

Figure 1 – Déformation

2. Et d'un point $b \in B$ tel que $p^{-1}(b) \simeq X$.

Difféomorphismes entre fibres

Lemme de fibration d'Ehresmann

Soit $f : M \longmapsto N$ une submersion surjective propre de classe au moins C^2 entre deux variétés alors $f : M \longmapsto N$ est une **fibration localement triviale**.

En considérant une déformation $p : \mathscr{M} \longmapsto B$ d'une variété compacte complexe X, ce résultat nous dit que localement toutes les fibres $p^{-1}(s)$ $(s \in B)$ sont difféomorphes mais **pas** nécessairement **biholomorphes** à la fibre centrale $p^{-1}(b) = X$.

Espace de module local

Théorème de Kuranishi

Soit X une variété complexe compacte alors il existe une déformation $\pi : \mathscr{K} \longmapsto (K,0)$ de X qui soit :

- Localement **complète**.

  Toutes les déformations infinitésimales de X se retrouvent dans $\mathscr{K}$ et K via un morphisme.

- **Verselle**.

  Le morphisme en question n'est pas unique mais sa différentielle l'est au point marqué.

Nous appellerons $\pi : \mathscr{K} \longmapsto (K,0)$ la famille de Kuranishi et K l'espace de Kuranishi.

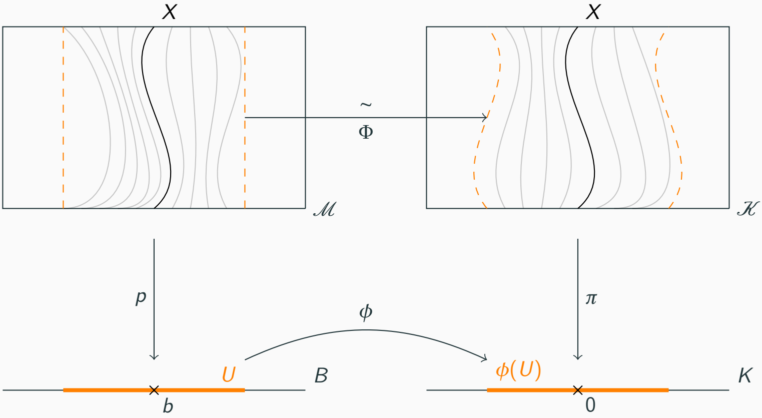

Figure 2 – Une déformation quelconque et la famille de Kuranishi

Construction de l'espace de Kuranishi

Structures complexes

Soit X une variété complexe compacte, J sa structure complexe naturelle.

$$\begin{tikzcd}
\{\text{structures complexes (proches de J) sur } X\} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Newlander-Niremberg}"] \\
\{J_t \in End(TX) \mid J_t^2 = -Id, J_t \text{ intégrable}\} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{aglèbre linéaire}"] \\
\{\text{Décomposition de } TX \text{ en sous espaces } \mid J_t^2 = -Id, J_t \text{ intégrable}\} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\left\{\alpha_t \in Hom(T^{0,1}X, T^{1,0}X) \mid \bar{\partial}\alpha_t = -[\alpha_t, \alpha_t], \right\} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{Espace de Kuranishi...}
\end{tikzcd}$$

Déformations à l'ordre 1

Théorème
Les déformations à l'ordre 1 de la structure complexe J sont paramétrées par

$$H^1(X, TX) = \frac{Ker(\bar{\partial} : A^{0,1}(TX) \to A^{0,2}(TX))}{Im(\bar{\partial} : A^0(TX) \to A^{0,1}(TX))}$$

Théorème
Les obstructions à étendre les déformations d'ordre 1 à tout ordre vivent dans

$$H^2(X, TX) = \frac{Ker(\bar{\partial} : A^{0,2}(TX) \to A^{0,3}(TX))}{Im(\bar{\partial} : A^{0,1}(TX) \to A^{0,2}(TX))}$$

Merci de votre attention !