Espaces de Kuranishi du (n)-tore

Théo JAMIN

14 février 2022

Laboratoire angevin de recherche en mathématiques – Université d'Angers

Objectifs

- Faire une introduction à la théorie des **déformations**.
- Comprendre le théorème de **Kuranishi** et l'application de **Kodaira-Spencer**.
- Appliquer ces résultats sur l'exemple du (n-)**tore**.

Variété différentiable compacte

"Une **variété différentiable** compacte est obtenue en recollant un nombre fini d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ par des **difféomorphismes**."

Variété complexe compacte

"Une **variété complexe** compacte est obtenue en recollant un nombre fini d'ouverts de $\mathbb{C}^n$ par des **biholomorphismes**."

Introduction

On paramètre les recollements par t et on note les variétés obtenues par X_t. Alors

- La variété différentiable X_t est la même que X.
- La structure complexe sur X_t n'est pas la même que celle de X, pour t aussi proche de 0 que l'on veut.

Étant donné une variété complexe X, la **théorie des déformations**, c'est exactement l'étude des **structures complexes** sur X_t pour des t proches de 0.

Formellement, qu'est-ce qu'une déformation ?

Déformation de structures complexes

Soit X une variété complexe compacte.
Une **déformation** de X est la donnée de $p : \mathscr{M} \longmapsto B$ un morphisme lisse et propre entre deux variétés complexes $\mathscr{M}$ et B et d'un point $b \in B$ tel que $p^{-1}(b)$ soit biholomorphe à X.

Pensez à $\mathscr{M}$ comme étant $\{X_t \mid t \in B\}$ comme construit dans l'introduction.

Il faudrait expliciter le biholomorphisme entre $p^{-1}(b)$ et X mais nous considérerons que c'est l'identité.

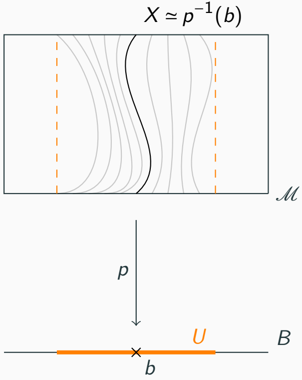

Figure 1 – Déformation

Difféomorphismes entre fibres

Lemme de fibration d'Ehresmann

Soit $f : M \longmapsto N$ une submersion surjective propre de classe au moins C^2 entre deux variétés alors $f : M \longmapsto N$ est une **fibration localement triviale**.

En considérant une déformation $p : \mathscr{M} \longmapsto B$ d'une variété compacte complexe X, ce résultat nous dit que localement toutes les fibres $p^{-1}(s)$ ($s \in B$) sont difféomorphes mais **pas** nécessairement **biholomorphes** à la fibre centrale $p^{-1}(b) = X$.

Application au tore : rappels

Un tore complexe de dimension 1 est donné par un réseau dans $\mathbb{C}$: $\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}^*$ on peut écrire $\mathscr{T}_{\tau_1,\tau_2} = \mathbb{C}/(\tau_1\mathbb{Z} \times \tau_2\mathbb{Z})$

Cependant, en multipliant par τ_1^{-1}, on se ramène à l'étude du tore $\mathscr{T}' = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \times \tau_2\tau_1^{-1}\mathbb{Z})$ qui est biholomorphe à $\mathscr{T}$. On peut donc restreindre l'étude des tores à un seul paramètre dans $\mathbb{C}^*$.

Application au tore : construction d'une déformation

Etant donné $\tau \in \mathbb{C}^*$, on considère le tore correspondant $\mathscr{T}_\tau$.
Pour construire une déformation de $\mathscr{T}_\tau$, on peut considérer l'espace des paramètres B comme étant un ouvert dans $\mathbb{C}^*$ contenant τ. Et pour chaque élément $b \in B$, considerer la fibre $\mathscr{T}_b$.

Formellement :
une déformation du tore $\mathscr{T}_\tau$ est donné par

$$p : (\mathbb{C} \times B)/G \longmapsto (B, \tau)$$

avec

$$G = \left\{ \begin{array}{rl} g_{m,n} : \mathbb{C} \times B & \longmapsto \mathbb{C} \times B \\ (z, \omega) & \longmapsto (z + m\omega + n,\ \omega) \end{array} \right\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

Résultat principal de la théorie des déformations

Théorème de Kuranishi (Blackbox)

Théorème de Kuranishi

Soit X une variété complexe compacte alors il existe une déformation $\pi : \mathscr{K} \longmapsto (K, 0)$ de X qui soit :

- Localement **complète**.

  Toutes les déformations infinitésimales de X se retrouvent dans $\mathscr{K}$ et K via un morphisme.

- **Verselle**.

  Le morphisme en question n'est pas unique mais sa différentielle l'est au point marqué.

Nous appellerons $\pi : \mathscr{K} \longmapsto (K, 0)$ la famille de Kuranishi et K l'espace de Kuranishi.

Explication en dessin

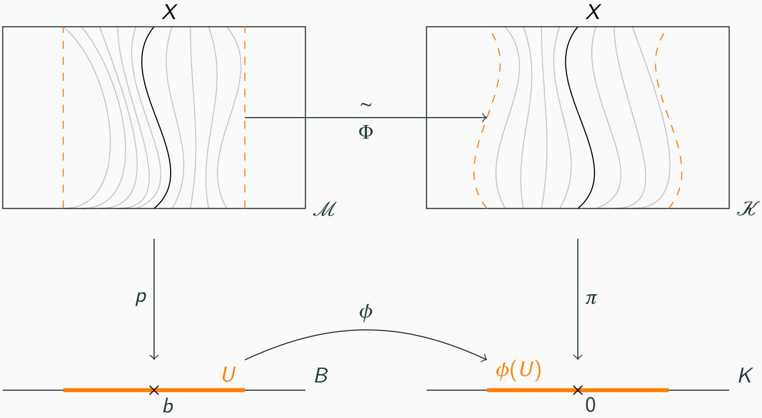

Figure 2 – Une déformation quelconque et la famille de Kuranishi

Question à 1000 points

Soit X une variété complexe compacte.

Etant donné une déformation $p : \mathscr{M} \longmapsto (B,0)$ de X, comment savoir si elle vérifie les conditions pour être la famille de Kuranishi de X ?

Elle n'est pas unique, mais tant pis, ici nous ferons tout comme.

Critères pratiques de complétude et versalité

Déformations infinitésimales

Pour parler d'espace de module **local** de structures complexes d'une variété complexe compacte X, on a besoin de regarder les déformations proches de la structure initiale : les **déformations infinitésimales**.

Les travaux de **Kodaira et Spencer** ont permis de dire que les déformations infinitésimales sont décrites *(à isomorphisme près)* par un espace vectoriel : $H^1(X,\Theta)$.

Construction de $H^1(X,\Theta)$

Soient f et g deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. On dit que f et g sont équivalentes en $p \in U$ si il existe un voisinage de p sur lequel f et g coïncident.

Germe de fonction

Un germe de fonction en p est une classe d'équivalence de fonctions pour la relation précédente.

On note $\mathscr{O}_p$ l'ensemble des germes de fonctions holomorphes en p.

Faisceaux

Le faisceaux des germes de fonctions holomorphes sur une variété compacte complexe X est définit par $\mathscr{O} = \bigcup_{p \in X} \mathscr{O}_p$.

Soit X une variété complexe compacte de dimension n et $\{U_i\}_{i\in I}$ des ouverts recouvrants X *(que l'on identifie à des ouverts de $\mathbb{C}^n$ par définition des variétés complexes)*.

Champs de vecteurs holomorphes

Un champ de vecteur holomorphe θ sur X est donné par une famille de fonctions holomorphes $\{\theta_i^\alpha\}$ sur les U_i et

$$\theta = \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_i^\alpha(p) \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}$$

où les $(z_i^1, \cdots, z_i^n)$ sont les coordonnées sur U_i.

Θ faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes

En utilisant les deux dernières slides, on définit le **faisceau des germes de champs de vecteurs** sur une variété complexe compacte X. On notera ce faisceau Θ.

La suite fondamentale

Soient X une variété complexe compacte et $p : \mathscr{M} \longmapsto (B,0)$ une déformation de X *(pensez à $\mathscr{M} = \{X_t | t \in B\}$)*. On considère alors :

- Ψ le faisceau des germes de champs de vecteurs sur $\mathscr{M}$.
- Θ le faisceau des germes de champs de vecteurs sur $\mathscr{M}$ tangents aux fibres de p *(donc aux X_t)*.
- Λ le faisceau quotient Ψ/Θ.

Suite fondamentale

On a alors la suite exacte courte suivante :

$$0 \longmapsto \Theta \longmapsto \Psi \longmapsto \Lambda \longmapsto 0$$

Application de Kodaira-Spencer

On associe à la suite fondamentale précédente la **suite exacte longue en cohomologie** *(Cěch)* :

$$0 \longmapsto H^0(\mathscr{M},\Theta) \longmapsto H^0(\mathscr{M},\Psi) \longmapsto H^0(\mathscr{M},\Lambda) \longmapsto H^1(\mathscr{M},\Theta) \longmapsto \cdots$$

On s'intéresse à l'**application connectante** $\delta : H^0(\mathscr{M},\Lambda) \longmapsto H^1(\mathscr{M},\Theta)$
Par définition des faisceaux, il est tout à fait possible de les restreindre sur des ouverts de $p^{-1}(U)$ avec U un ouvert de 0 dans B et d'en prendre la limite directe, i.e. :

$$\delta_0 : H^0(\mathscr{M}|_0,\Lambda|_0) \longmapsto H^1(\mathscr{M}|_0,\Theta|_0)$$

J'ai noté $\mathscr{M}|_0$ pour $\mathscr{M}|_{p^{-1}(0)}$ pour la clarté et de même pour les faisceaux.

Lemmes

- $\mathscr{M}_0 = X$.
- $T_0 B \simeq H^0(\mathscr{M}_0, \Lambda_0)$.
- Θ_0 est le faisceau des germes de champs de vecteurs tangents à X.

Application de Kodaira Spencer

On appelle application de Kodaira Spencer, l'application

$$KS : T_0 B \longrightarrow H^1(X, \Theta)$$

Critères de complétude et de versalité

- Si l'application de Kodaira Spencer est **surjective** alors la déformation est **complète** en $0 \in B$.

- Si l'application de Kodaira Spencer est **injective** alors la déformation est verselle.

KS explicité

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de $\mathscr{M}$ et $(z_i^1, \cdots, z_i^n, t^1, \cdots, t^m) = (z, t)$ les coordonnées locales sur U_i telles que $p(z,t) = t$ avec des recollements (changements de cartes) holomorphes f_{ij}, c'est à dire $z_j^\alpha = f_{ij}^\alpha(z_i, t)$.

Alors, l'application KS est donné par :

$$\begin{aligned} KS : T_0 B &\longmapsto H^1(X, \Theta) \\ \frac{\partial}{\partial t} &\longmapsto \{\theta_{ij}\} \end{aligned}$$

où $\theta_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left.\frac{\partial f_{ij}(z_j, t)}{\partial t}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}$

Application au tore : KS

Reprenons la déformation du tore :

$$p : (\mathbb{C} \times B)/G \longmapsto (B, \tau), \ G = \{g_{m,n} : (z, \omega) \longmapsto (z + m\omega + n, \ \omega)\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

On se donne $\{U_i\}$ un recouvrement de $(\mathbb{C} \times B)/G$ et des coordonnées locales (z_i, ω) sur chaque $\{U_i\}$.
Les changements de cartes sont donnés par $z_i = f_{ij}(z_j, \omega) = z_j + m_{ij}\omega + n_{ij}$ avec m_{ij} et n_{ij} des entiers rationnels.
On peut donc écrire l'application KS :

$$\begin{aligned} KS : T_\tau B &\longmapsto H^1(\mathscr{T}_\tau, \Theta_\tau) \\ \frac{\partial}{\partial \omega} &\longmapsto \{m_{ij} \frac{\partial}{\partial \omega}\} \end{aligned}$$

et vérifier que c'est un isomorphisme. *(Pas si évident que ça, il nous faudrait l'isomorphisme de Dolbeault mais cela nous mènerai trop loin.)*

Application au tore : conclusion

Espace de Kuranishi du tore

Soit $\tau \in \mathbb{C}^*$ et $\mathscr{T}_\tau$ le tore correspondant.
La famille : $(\mathbb{C} \times B)/G \longmapsto (B, \tau)$ est

- Complète en τ.

- Verselle en τ.

Remarques et corollaires

Quelques remarques

- Le travail fait pour le tore ici n'est pas une avancée mathématiques en soit puisque l'on connait l'espace de module **global** du tore. *Il est donné par un domaine fondamental de* $\mathbb{H} = \{z | \mathscr{I}(z) > 0\}$ *sous l'action de* $PSL_2(\mathbb{C})$.

- Cependant on peut faire la même chose *(avec des calculs beaucoup plus longs)* pour le tore de dimension n et là c'est une vrai avancée ! C'était d'ailleurs dans un des articles de Kodaira et Spencer de 1958.

Merci de votre attention !