Séminaire des doctorants.

Lemme. *Une fonction de choix social qui vérfie les critères* ***d'éligibilité totale*** *et* ***de Condorcet généralisé*** *est* ***unanime****, i.e.*

$$(E)\ +\ (C) \implies (U)$$

Proof. Soient c_i, $c_j \in \mathcal{C}$ et $\vec{\succ} \in \mathcal{P}^N$ telle que $c_i \vec{\succ} c_j$.
F vérifie (E) donc

$$\exists \vec{\succ}' \in \mathcal{P}^N \text{ tel que } F(\vec{\succ}') = c_i$$

Soit $k \neq i, j$. On a supposé que F vérifie (C) donc on a

$$F(\vec{\succ}') = c_i \implies F(T_{ik}(\vec{\succ}')) = c_i \implies F(T_{ij} \circ T_{ik}(\vec{\succ}')) = c_i$$

Mais dans l'urne $T_{ij} \circ T_{ik}(\vec{\succ}')$, c_i domine c_j et en particulier $T_{ij} \circ T_{ik}(\vec{\succ}')\Big|_{ij} = \vec{\succ}\Big|_{ij}$.
Il vient que

$$F(T_{ij} \circ T_{ik}(\vec{\succ}')) = c_i \neq c_j \implies F(\vec{\succ}) \neq c_j$$

$\square$

Théorème 0.1. *Une fonction de choix social qui vérifie les critères* ***d'éligibilité totale*** *et* ***de Condorcet généralisé*** *est* ***dictatoriale****, i.e.*

$$(E) \ + \ (C) \implies (D)$$

Proof.
Soit F une fonction de choix social qui vérifie $(E) \ + \ (C)$.
Soit $\vec{\succsim} \in \mathcal{P}^N$ telle que $c_i \vec{\succsim} c_j$ et $T_{ij}(\vec{\succsim}) = \vec{\succsim}$ (i.e.: $c_i \vec{\succsim} c_j \vec{\succsim} \cdots$).
On commence par chercher notre dictateur :
On construit une suite $\vec{\succsim}^{(n)}$ d'urnes en inversant les positions des c_i et c_j dans les n premiers votes.

	1	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$	
$\vec{\succsim}^{(0)}$	c_i	$\cdots$	c_i	c_i	c_i	$\cdots$	c_i
	c_j	$\cdots$	c_j	c_j	c_j	$\cdots$	c_j
$\vec{\succsim}^{(n)}$	c_j	$\cdots$	c_j	c_j	c_i	$\cdots$	c_i
	c_i	$\cdots$	c_i	c_i	c_j	$\cdots$	c_j
$\vec{\succsim}^{(N)}$	c_j	$\cdots$	c_j	c_j	c_j	$\cdots$	c_j
	c_i	$\cdots$	c_i	c_i	c_i	$\cdots$	c_i

Par le lemme 1, F vérifie (U), en particulier $F(\vec{\succsim}^{(0)}) = c_i$ et $F(\vec{\succsim}^{(N)}) = c_j$. Donc il existe un individu n_{ij}, que l'on nommera pivot (pour l'instant et dictateur à la fin de cette preuve), qui change l'issue de F en changeant son vote (peut être qu'il en existe plusieurs mais nous prenons le premier).

$$F(\vec{\succsim}^{(k)}) = \begin{cases} c_i & \text{si } k < n_{ij}, \\ c_j & \text{si } k = n_{ij} \end{cases}$$

On montre que $n_{ij} = n_{ik} = \cdots = n_i$:
Soit maintenant $\vec{\succsim}'$ une urne telle que $\vec{\succsim}'\Big|_{ij} = \vec{\succsim}^{(n_{ij}-1)}\Big|_{ij}$, i.e. :

	1	$\cdots$	$n_{ij}-1$	n_{ij}	$n_{ij}+1$	$\cdots$	N
$\vec{\succsim}'$	c_j	$\cdots$	c_j	c_i	c_i	$\cdots$	c_i
	$\square$	$\cdots$	$\square$				
	c_i	$\cdots$	c_i	c_j	c_j	$\cdots$	c_j
	$\square$	$\cdots$	$\square$	c_k	c_k	$\cdots$	c_k

où $\square$ représente les emplacements possibles pour c_k.

On a donc

$$\left.\begin{array}{ll} T_{ij}(\vec{\succsim}')\Big|_{ij} & = \vec{\succsim}'\Big|_{ij} = \vec{\succsim}^{(n_{ij}-1)}\Big|_{ij} \\ F(\vec{\succsim}^{(n_{ij}-1)}) & = c_i \end{array}\right\} \underset{(C)}{\Longrightarrow} F(T_{ij}(\vec{\succsim}')) = c_i$$

En particulier,

$$F(T_{ij}(\vec{\succsim}')) = c_i \neq c_j \underset{(\overline{C})}{\Longrightarrow} F(\vec{\succsim}') \neq c_j$$

Mais c_j domine tous les candidats autre que c_i. Donc $F(\vec{\succsim}') \neq c_l$ pour tout $l \neq i, j$ et finalement

$$\boxed{F(\vec{\succsim}') = c_i}$$

Si l'on définit n_ik comme étant le premier votant qui change l'issue de F en faveur de c_k en changeant son vote, on remarque que $n_{ik} \geq n_{ij}$. Mais j et k sont arbitraires et en particulier peuvent être échangés, donc

$$\boxed{n_{ij} = n_{ik} = \cdots = n_i}$$

On montre que $n_i = n_j = \cdots = n_{dictateur}$ **:**

Soit $\vec{\succsim}''$ une urne telle que $\vec{\succsim}''\Big|_{ij} = \vec{\succsim}^{(n_{ij})}\Big|_{ij}$, i.e. :

	1	$\cdots$	$n_{ij}-1$	n_{ij}	$n_{ij}+1$	$\cdots$	N
$\vec{\succsim}''$	$\square$	$\cdots$	$\square$				
	c_j	$\cdots$	c_j	c_j	c_i	$\cdots$	c_i
	$\square$	$\cdots$	$\square$		$\square$	$\cdots$	$\square$
	c_i	$\cdots$	c_i	c_i	c_j	$\cdots$	c_j
	$\square$	$\cdots$	$\square$	c_k	$\square$	$\cdots$	$\square$

On a donc

$$\left.\begin{array}{ll} T_{ij}(\vec{\succsim}'')\Big|_{ij} & = \vec{\succsim}''\Big|_{ij} = \vec{\succsim}^{(n_{ij})}\Big|_{ij} \\ F(\vec{\succsim}^{(n_{ij})}) & = c_j \end{array}\right\} \underset{(C)}{\Longrightarrow} F(T_{ij}(\vec{\succsim}'')) = c_j$$

En particulier,

$$F(T_{ij}(\vec{\succsim}'')) = c_j \neq c_i \underset{(\overline{C})}{\Longrightarrow} F(\vec{\succsim}'') \neq c_i$$

De plus, remarquons que l'on peut supposer sans pertes que $\vec{\succsim}''\Big|_{ik} = \vec{\succsim}'\Big|_{ik}$.

On a alors

$$\left.\begin{array}{ll} T_{ik}(\vec{\succsim}'')\Big|_{ik} & = \vec{\succsim}''\Big|_{ik} = \vec{\succsim}'\Big|_{ik} \\ F(\vec{\succsim}') & = c_i \end{array}\right\} \underset{(C)}{\Longrightarrow} F(T_{ik}(\vec{\succsim}'')) = c_i$$

En particulier,

$$F(T_{ij}(\vec{\succsim}'')) = c_i \neq c_k \underset{(\overline{C})}{\Longrightarrow} F(\vec{\succsim}') \neq c_k$$

On a discréditer c_i puis c_k, donc finalement

$$\boxed{F(\vec{\succsim}'') = c_j}$$

Remarquons que les positions relatives de c_j et de c_k dans l'urne $T_{jk}(\vec{\succsim}'')$ sont quelconques sauf pour l'individu pivot :

	1	$\cdots$	$n_{ij}-1$	n_{ij}	$n_{ij}+1$	$\cdots$	N
$T_{ik}(\vec{\succsim}'')$	$\square$	$\cdots$	$\square$		$\square$	$\cdots$	$\square$
	c_j	$\cdots$	c_j	c_j	c_j	$\cdots$	c_j
	$\square$	$\cdots$	$\square$	c_k	$\square$	$\cdots$	$\square$
	c_i	$\cdots$	c_i	c_i	c_i	$\cdots$	c_i

Donc

$$\boxed{n_{jk} = n_j = n_i}$$

$\square$