Sur le champ de Teichmüller des quotients compacts de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Théo JAMIN

14 février 2022

Résumé

Soit Γ un sous-groupe discret co-compact et sans torsion de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. On sait depuis les travaux d'E. GHYS [3] que l'espace de KURANISHI du quotient de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par Γ est donné par le germe analytique de la variété de représentation $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ pointée au morphisme trivial. L'idée centrale est de déformer l'holonomie de la $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$-structure naturelle de ces quotients afin d'obtenir de nouvelle structures complexes. Depuis, les travaux de F. KASSEL ont montré que l'ensemble des représentations qui sont l'holonomie d'une telle (G, X)-structure complète (appelées admissibles), forme un ouvert de la variété de représentation. On s'intéresse alors aux déformations des structures complexes des variétés obtenues par la construction d'E. GHYS et on montre que la famille au dessus de la variété de représentations est complète en tous points admissibles. De plus, modulo conjugaison, cette famille est verselle. Ce résultat nous amène donc à considérer le champ quotient quotient des caractères admissibles et nous montrons que c'est un ouvert dans le champ de TEICHMÜLLER de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$.

Introduction

Considérons G un groupe de Lie complexe, que l'on supposera connexe ainsi qu'un sous-groupe Γ discret co-compact de G tel que G/Γ soit une variété complexe compacte.

Question 1 (Générale)**.** On s'intéresse seulement à la structure complexe de ce quotient, en particulier :

Local

— Quelles sont les variations infinitésimales de la structure complexe de G/Γ ?
i.e. on cherche les morphismes lisses propres $\pi : \mathcal{X} \to B$ entre espaces analytiques avec $\pi^{-1}(b)$ C^∞-difféomorphe à $(G/\Gamma)^{diff}$.

i.e. Quel est son espace de KURANISHI ?

Global

— Quelles sont toutes les déformations de la structure complexe de G/Γ ?

i.e. Quel est son espace de TEICHMÜLLER ?

— Surtout : peut-on trouver une structure analytique sur cet espace ?

Exemple. Voici des cas déjà traités :

— G est résoluble, NAKAMURA détermine $Kur(G/\Gamma)$ (en faisant la liste des Γ),

— G est nilpotent, ROLLENSKE détermine $Kur(G/\Gamma)$ (en donnant les équation dont le degré ne dépend que de l'indice de nilpotence de G),

—

Théorème 1 (RAGHUNATHAN - 1966)**.** *Si G est semi-simple et sans facteur simple de rang 1 alors, la structure complexe de G/Γ est rigide (i.e. $Kur(G/\Gamma) = pt$).*

En particulier, $\forall n \geq 3$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/\Gamma$ est rigide.

Question 2. Que se passe-t-il dans le cas $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$?

(G, X)-structure

Commençons par quelques rappels.

Définition. Soit M une variété et X une variété munit d'une action de G. Une (G, X)-structure est la donnée d'un atlas U_i recouvrement de M par des ouverts et des applications $\phi_i : U_i \to X$ tels que les changements de cartes soient des restrictions d'éléments de G, i.e.

$$\forall i, j, \text{ tels que } U_i \cap U_j \neq \emptyset, \ \exists g_{i,j} \in G \text{ tel que } \phi_j \circ \phi_i^{-1} = g_{i,j}|_{U_i \cap U_j}$$

Proposition 1. *Une (G, X)-structure est déterminée par une paire* $(\mathrm{hol}, \mathrm{dev})$

$$\mathrm{hol} : \pi_1(M) \to G, \qquad \mathrm{dev} : \widetilde{M} \to X \ \textit{(difféo local } \mathrm{hol}\textit{-équivariant)}$$

Ce dictionnaire est à équivalence près (isomorphisme de (G, X)-structure $1:1$ G-conjugaison de l'holonomie/pré-composition de dev*)*

Revenons à notre cas d'étude $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ un sous-groupe discret co-compact et sans torsion.

La variété $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ est naturellement munit d'une $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$-structure, avec $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agissant par multiplications gauche/droite sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Cette structure est complète (l'application développante est un revêtement, et puisque $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ simplement connexe, dev est un difféomorphisme global), d'holonomie

$$h : \Gamma \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \qquad \gamma \mapsto (\mathrm{Id}, \gamma)$$

Théorème 2 (Principe d'Ehresmann-Thurston)**.** *Si h' est suffisamment proche (pour la topologie compacte-ouverte sur une partie génératrice finie du $\pi_1(M)$) du morphisme h, il existe une (G, X)-structure sur $\mathcal{M}$ d'holonomie h' et les (G, X)-structures définies sont difféomorphes si, et seulement si, h et h' son conjugués par un élément de G.*

Théorème 3 (Rigidité de Mostow)**.** *$H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^\iota) = 0$, i.e. le plongement $\iota := pr_2 \circ h : \Gamma \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est rigide au sens où tout morphisme proche de ι lui est conjugué.*

Résultats de Ghys

Soit $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$, considérons l'action

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) &\to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \\ (\gamma, x) &\mapsto \rho(\gamma)^{-1} x \gamma \end{aligned}$$

Dès que le quotient est une variété complexe compacte,
- On le note $\mathcal{M}_\rho$,
- ρ est dit *admissible*.

Remarques. Nous sommes dans un contexte particulier, principalement du à deux choses :
- Les variétés $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ ne sont pas Kalhériennes.
- La forme de Killing sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est bi-invariante et descend au quotient $\mathcal{M}_\rho$. On a donc une métrique riemanienne holomorphe sur $\mathcal{M}_\rho$.

Lemme 1 (Ghys - 1995)**.** *Si $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ est suffisamment proche (pour une partie génératrice fixée de Γ) de ρ_0 alors ρ est admissible.*

Théorème 4 (Ghys - 1995)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de ρ_0. La famille tautologique*

$$\begin{tikzcd} \{\mathcal{M}_\eta \,|\, \eta \in \mathcal{U} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))\} =: \mathrm{Taut}|_{\mathcal{U}} \arrow[d] \\ \mathcal{U} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \end{tikzcd}$$

pointée au morphisme trivial $\rho_0 : \Gamma \to \mathrm{Id}$ est
- *complète : $\forall$ déformation $p : \mathcal{X} \to (B, b)$ marquée,*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr, "\pi"'] & f^* \mathrm{Taut}|_{\mathcal{U}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Taut}|_{\mathcal{U}} \arrow[d] \\ & B \arrow[r, "f"] & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

- *verselle : $d_b f : T_b B \to T_{f(b)} \mathcal{U}$ est unique (l'isomorphisme $\mathcal{X} \simeq f^* \mathrm{Taut}|_{\mathcal{U}}$ est unique).*

De plus, tout automorphisme de $\mathcal{M}_\rho$ s'obtient essentiellement comme une conjugaison par un élément $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ de ρ.

Plan

1 Généralisation (locale)

On fixe une présentation de Γ

$$\Gamma \coloneqq \langle \gamma_1, \cdots, \gamma_n \,|\, R_1, \cdots, R_m \rangle$$

Et on définit

$$\mathcal{R}(\Gamma) \coloneqq \left\{(g_1, \cdots, g_n) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^n \subset \mathbb{C}^{4n} \,|\, R_i(g_1, \cdots, g_n) = \mathrm{Id},\ 1 \leq i \leq m\right\}$$

Remarque.

— $\mathcal{R}(\Gamma)$ admet une structure d'espace analytique,

— $\mathcal{R}(\Gamma)$ ne dépend pas de la présentation de Γ,

— (construction de Weil :) $T_\rho \mathcal{R}(\Gamma)^{Zar} \simeq Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2^\rho)$.

1.1 Admissibilité

On pose

$$\mathcal{R}(\Gamma)^{adm} \coloneqq \{(g_1, \cdots, g_n) \in \mathcal{R}(\Gamma) \,|\, \rho(\gamma_i) \coloneqq g_i,\ \forall i = 1, \ldots, n,\ \rho \text{ est admissible}\}$$

Kassel généralise le lemme d'E. Ghys et donne un critère d'admissibilité qui permet d'obtenir le corollaire suivant

Théorème 5 (Kassel - 2009)**.** *$\mathcal{R}(\Gamma)^{adm}$ est un ouvert euclidien de $\mathcal{R}(\Gamma)$.*

Remarque.

— De plus, le critère implique trivialement que toute représentation à image compacte est admissible. En particulier, $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SU}_2) \subset \mathcal{R}(\Gamma)^{adm}$.

— Cela étant, $\mathcal{R}(\Gamma)^{adm}$ n'est presque jamais un ouvert de Zariski de $\mathcal{R}(\Gamma)$ (sauf cas $b_1(\Gamma) = 0$).

1.2 Généralisation de la complétude

Si $\mathcal{R}(\Gamma)^{adm}$ n'est pas contenu dans la composante connexe de ρ_0, il faut s'assurer que les quotients sont toujours difféomorphes.

Proposition 2. *Pour tout $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^{adm}$, $(\mathcal{M}_\rho)^{diff}$ est C^∞-difféomorphe à $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma)^{diff}$.*

On compare les déformations de cette (G, X)-structure et les déformations de la structure complexe. Considerons le fibré tangent à $\mathcal{M}_\rho$, identifié au quotient :

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \\ (\gamma, (x, v)) &\longmapsto \left(\rho(\gamma)^{-1} x \gamma, \mathrm{Ad}_{\rho(\gamma)^{-1}}(v)\right) \end{aligned}$$

Déformation de la (G, X)-structure

— Contrôlées par

$$H^1(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho)$$

avec $\mathcal{F}_\rho$ le faisceau des germes de sections localement constantes.

— Obstructions dans

$$H^2(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho)$$

Déformation de structures complexes

— Contrôlées par

$$H^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$$

avec Θ_ρ le faisceau des germes de sections holomorphes (champs de vecteurs).

— Obstructions dans

$$H^2(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$$

Proposition 3. *On a une injection $H^i(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho) \hookrightarrow H^i(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$, $i = 0, 1, 2$.*

Notons $h^i_{\mathcal{F}}(\rho) \coloneqq \dim H^i(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho)$ et $h^i_\Theta(\rho) \coloneqq \dim H^i(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$.

Théorème 6 (Jamin - 2021)**.** *Si $h^1_\Theta(\rho) = h^1_{\mathcal{F}}(\rho)$ alors, la famille*

$$\begin{array}{c} \{\mathcal{M}_\eta \,|\, \eta \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))\} \\ \big\downarrow \\ \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \end{array}$$

pointée au morphisme ρ est complète.

Remarque. Dans un espace de Kuranishi (i.e. la une base d'une déformation complète et verselle), il n'y a pas de répétitions au sens où il n'y a pas de sous-espace $\mathbb{C}$-analytique sur lequel la restriction de la famille est triviale.

De plus, puisque $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{M}_\rho)$ correspond à la composante connexe du stabilisateur de $\rho(\Gamma)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on sait que la famille au dessus de la $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-orbite $\mathcal{O}_\rho$ de ρ est triviale.

Corollaire. *L'espace de Kuranishi de $\mathcal{M}_\rho$ est donné par le germe analytique d'un sous-espace analytique de $\mathcal{R}(\Gamma)^{adm}$ localement transverses à la $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-orbite de ρ.*

Idée de preuve du théorème :
Pour les obstructions supérieures, on considère une déformation de $\mathcal{M}_\rho$ sur $\mathbb{C}$ et on suppose qu'à l'ordre n, la déformation est donnée par la déformation du morphisme ρ c'est-à-dire qu'il existe des cochaines telles que la déformation soit donnée par

$$\rho_n := \rho^{(c_1,\cdots,c_n)} : \gamma \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(\gamma)t^i\right)\rho(\gamma)$$

On montre ensuite que cette l'obstruction à étendre cette déformation à l'ordre $n+1$ est donnée par l'obstruction à étendre la structure complexe au même ordre et on construit récursivement une déformation formelle de ρ. Ensuite

$$\text{Artin} + \text{formel} \implies \text{convergence}$$

Proposition 4. *Si $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ n'est pas partout non réduite, il existe un ouvert de Zariski analytique V sur lequel $h^1_\Theta(\rho) = h^1_{\mathcal{F}}(\rho)$.*

Question 3. A-t-on $h^1_{\mathcal{F}} = h^1_\Theta$ sur $\mathcal{R}(\Gamma)^{adm}$?

2 Généralisation globale

2.1 Champ de Teichmüller

Soit X une variété différentiable compacte connexe orientable de dimension paire et supposons que X admette une structure complexe. On considère l'espace $\mathcal{I}(X)$ des structures complexes sur X. Et son espace de Teichmüller $Teich(X)$ est définit par le quotient de $\mathcal{I}(X)$ par l'action de $\mathrm{Diff}^0(X)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Diff}(X)^0 \times \mathcal{I}(X) &\to \mathcal{I}(X) \\ (f, J) &\mapsto (df)^{-1} \circ J \circ df \end{aligned}$$

De façon analogue, on définit l'espace de modules de Riemann comme le quotient de $\mathcal{I}(X)$ par l'action de $\mathrm{Diff}^+(X)$.

De plus, pour un ouvert $V \subset \mathcal{I}(X)$ (stable par $\mathrm{Diff}(X)^0$), on définit de façon similaire $Teich(X, V)$ l'espace de Teichmüller de X dont toutes les structures complexes sont dans V.

Question 4. Quelle structure analytique cet espace admet-il ?

On connaît des exemples de variétés pour lesquelles cet espace topologique n'est pas Hausdorff et n'admet donc pas de structure de variété complexe ni de structure d'espace analytique. Pour répondre à la question, il faut considérer les champs.

Théorème 7 (Meersseman - 2018)**.** *Soit $V \subset \mathcal{I}(X)$. L'espace de Teichmüller d'une variété $Teich(X, V)$ admet une structure de champ (au dessus du site $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$).*

De plus, si

$$\exists a \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall J \in V,\ \dim \mathrm{Aut}(X, J) \leq a$$

alors ce champ est analytique.

Le champ de Teichmüller est une catégorie dont

— les objets sont les familles $\pi : \mathcal{X} \to B$ avec $B \in \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$ de fibres difféomorphes à X (l faut encore une hypothèse sur la structure de cette famille, mais ce n'est pas essentiel pour comprendre la suite).

— les morphismes sont les diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{F} & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

entre deux familles.

Remarques.
— Ce théorème implique que localement cet espace est localement obtenu comme quotient d'un espace analytique par un groupe de Lie complexe avec point fixe,
— la structure de champ contient strictement plus d'informations que l'espace topologique obtenu comme quotient au sens où il contient aussi la donnée des groupes d'isotropie $\mathrm{Aut}^1(X_J)$ de chaque classe de structure complexe qui sont les biholomorphismes d'une structure complexe J qui sont isotopes à l'identité via des C^∞-difféomorphismes.
(attention, il y a des exemples de X tels que $\mathrm{Aut}^0(X) \subsetneq \mathrm{Aut}^1(X) \subsetneq \mathrm{Aut}(X)$)

2.2 Champ de caractères

Dans notre cas, on définit naturellement le *champ des caractères admissibles* comment champ quotient de $\mathcal{R}(\Gamma)^{adm}$ par l'action de conjugaison par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Remarque.
— Commençons par donner quelques détails sur le champ de caractères (admissibles). Si $V \subset \mathcal{R}(\Gamma)^a$ stable par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, le champ $[V/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$ est une catégorie dont
  — les objets sont la donnée d'un $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-fibrés principaux $P \to B$ au dessus d'un espace analytique $B \in \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$ et d'une application $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-équivariante $\psi : P \to V$.
  — les morphismes sont les diagrammes cartésiens

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "F"] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

compatible avec les applications équivariantes, c'est-à-dire tels que

$$\begin{tikzcd} & V & \\ P' \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[rr, "F"] & & P \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

commute.
— Ce résultat nous dit que toute famille de déformation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ dont les structures complexes sont biholomorphes à des $\mathcal{M}_\rho$ s'obtiennent de cette façon.

Proposition 5.

$$\mathrm{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho) \simeq C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(\rho(\Gamma))$$

Théorème 8. *Si $\mathcal{R}(\Gamma)$ n'est pas partout non réduite et V l'ouvert de Zariski analytique sur lequel $h^1_{\mathcal{F}} = h^1_\Theta$ alors*

$$[V/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})] \text{ est un sous-champ ouvert de } Teich(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma)$$

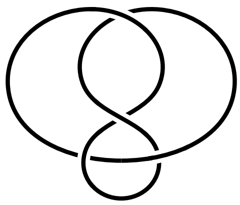
3 Exemple Groupe de nœud

Avant d'aller plus loin, quelques remarques :

Remarque. Si M est une variété hyperbolique fermée, compacte, réelle de dimension 3, son groupe fondamental $\pi_1(M)$ se plonge dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Par un résultat de Thurston, ce groupe se relève en un sous-groupe discret co-compact Γ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et la variété $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ s'identifie à un double revêtement du fibré des repères de M.
— Dans cette situation, Γ est de présentation finie,
— cela fournit des exemples,
— la cohomologie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ est intimement liée à celle de M.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\boxed{M_k \coloneqq \overline{S^3 - N(k)}} \arrow[d, "\text{(p,q)-chirurgie de \textsc{Dehn}}"'] & \boxed{\text{Nœud } k} \arrow[l, "\text{Exterieur du nœud}"'] \arrow[r, "\text{Présentation de \textsc{Wirtinger}}"] & \boxed{\pi_1(M_k) \text{ avec } b_1 = 1} \arrow[d, "\text{Théorème de de \textsc{Van-Kampen}}"] \\
\boxed{M_k(p,q)} \arrow[d, "\text{Fibré des repères}"'] \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Rigidité de \textsc{Mostow}}"] & & \boxed{\pi_1(M_k(p,q)) \text{ avec } b_1 = 0,1} \arrow[d, "\text{Variété des représentations}"] \\
\boxed{FM_k(p,q)} \arrow[r, "\text{Champ de \textsc{Teichmüller}}"] & \boxed{[V \subset \mathcal{R}(\pi_1(M_k(p,q)))^a / \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]} & \boxed{\mathcal{R}(\pi_1(M_k(p,q)))} \arrow[l, "\text{Restriction et quotient}"']
\end{tikzcd}$$

Soient k le nœud en huit, $\mathcal{V}(k)$ voisinage régulier. On note $M_k \coloneqq S^3 \setminus \mathcal{V}(k)$.



Voici une présentation du groupe fondamental de $M_k \coloneqq \overline{S^3 - N(k)}$:

$$\pi_1(M_k) = \langle a, b \,|\, ab^3ab^{-1}a^{-2}b^{-1} \rangle$$

— M_k est compacte,
— mais M_k n'est pas fermée, $\partial M_k \simeq \mathbb{T}$.
On va recoller un tore plein sur le bord de M_k. Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ et

$$\phi : \partial(S^1 \times \mathbb{D}) \to \partial\,(M_k)$$

tel que $\phi(S^1 \times \{1\})$ soit une courbe de pente p/q sur $\mathbb{T} \simeq \partial M_k$. La (p,q)-chirurgie de Dehn sur M_k est

$$M_k(p,q) \coloneqq \left(S^1 \times \mathbb{D}\right) \bigsqcup_{\phi} M_k.$$

Théorème 9 (Théorème 4.7 [?])**.** *La variété $M_k(p,q)$ est hyperbolique pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ différents de $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$ ou $(4,1)$.*

Soit n un entier. On peut facilement trouver une présentation du groupe $\pi_1(M_{4_1}(n,1))$:

$$\begin{aligned}\Gamma(n) \coloneqq& \pi_1(M_{4_1}(n,1)) \\ =& \langle a, b \,|\, aba^{-1}bab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1},\ a^{n-1}b^{-1}aba^{-1}bab^{-1} \rangle\end{aligned}$$

Par le résultat précédent, il existe $\iota_n : \Gamma(n) \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ discrète.
De plus,

$$\left(\pi_1(M_{4_1}(n,1))\right)^{ab} = \langle a, b \,|\, b,\ a^n \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

donc toute représentation abélienne de $\Gamma(n)$ est conjuguée à

$$\rho_m(a) = \rho_m(b) = \begin{pmatrix} e^{2i\pi m/n} & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi m/n} \end{pmatrix}, \qquad m = 1, \ldots, n$$

et est admissible (par compacité). On note $\mathcal{M}_{\rho_m}^{(n)}$ la variété quotient de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par

$$\Gamma(n) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \qquad (\gamma, x) \mapsto \rho_m(\gamma)^{-1} x \iota_n(\gamma)$$

Proposition 6.
$$h^1_{\mathcal{F}}(\rho_m) = h^1_{\Theta}(\rho_m) = 0$$

En particulier,
$$Kur(\mathcal{M}^{(n)}_{\rho_m}) = \{\mathrm{pt}\}$$

Corollaire. *On a*
$$\#\pi_0\left(\left|Teich(\mathcal{M}^{(n)}_{\rho_0})\right|\right) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Références

[1] M. Artin : *On the Solutions of Analytic Equations.* Inventiones mathematicae 5 (1968), p. 277-291. http://eudml.org/doc/141922

[2] A. Douady : *Obstruction primaire à la déformation.* Séminaire Henri Cartan, Tome 13 (1960-1961) no. 1, Exposé no. 4, 19 p. 1-19. http://www.numdam.org/article/SHC_1960-1961__13_1_A3_0.pdf.

[3] E. Ghys : *Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Journal für die reine und angewandte Mathematik 468 (1995), p. 113-138. http://eudml.org/doc/153767.

[4] F. Guéritaud and F. Kassel : *Maximally stretched laminations on geometrically finite hyperbolic manifolds.* Geometry & Topology, (2017), p. 693-840. https://arxiv.org/pdf/1307.0250.pdf.

[5] M. Heusener, J. Porti and E. Suárez Peiro : *Deformations of reducible representations of 3-manifold groups into* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Journal für die reine und angewandte Mathematik 530 (2001), p. 191-227. https://www.degruyter.com/view/journals/crll/2001/530/article-p191.xml.

[6] F. Kassel : *Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces.* Journal of Lie Theory 18 (2008), p. 961-978. https://www.heldermann-verlag.de/jlt/jlt18/kassella2e.pdf.

[7] G. Lakeland and C. Leininger : *Strict contractions and exotic SO0(d,1) quotients.* Journal of the London Mathematical Society 96 (2017), p. 642-662. http://dx.doi.org/10.1112/jlms.12087.

[8] L. Meersseman : *The Teichmüller and Riemann moduli stacks.* Journal de l'École polytechnique - Mathématiques, 6 (2019), p. 879-945. https://jep.centre-mersenne.org/item/JEP_2019__6__879_0/.

[9] N. Tholozan : *Sur la complétude de certaines variétés pseudo-riemanniennes localement symétriques.* (2013), available on Numdam. http://www.numdam.org/item/AIF_2015__65_5_1921_0/.

[10] N. Tholozan : *The Volume of complete anti-de Sitter 3-manifolds.* (2015). https://arxiv.org/abs/1509.04178.