Projet de Master Mathématiques Fondamentales Appliquées

Groupes de Schottky

Présenté par

Julien Lechaux

Encadré par

Théo Jamin

18 mai 2022

Plan

1 Introduction 2

2 Définitions et résultats immédiats 3

3 Groupes de Schottky 9

4 Orbites et Ensembles Limites 14

5 Ouverture 19

6 Annexe 20

1 Introduction

L'objectif de ce PRA est d'appréhender et de comprendre la notion de groupes de Schottky. Tant dans leur construction que dans leur dynamique. Un sujet particulièrement intéressant puisqu'il réunit géométrie, analyse complexe et théorie des groupes. Les groupes de Schottky ont été introduit en 1882 par Schottky, mais n'ont pas été étudié dans le détail. Les précurseurs de cette théorie sont Maskit et Marden qui, dans la fin des années 60, développèrent ce domaine des Mathématiques. Les groupes de Schottky sont très intéressants puisqu'ils relèvent d'une construction élémentaire (nous n'avons besoins que de courbes de Jordan) et forment des sous-groupes discrets dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ qui ne sont pas des groupes arithmétiques et ayant une dynamique intéressante. En effet, il est assez difficile d'affirmer au premier coup d'oeil si le groupe considéré est un groupe de Schottky. De plus, avec le développement de la théorie des groupes kléniens, les groupes de Schottky ont été un peu délaissé car ces groupes sont un sous-ensemble des groupes kléniens mais n'en reste pas pour autant inintéressant.

Il s'agira alors dans un premier temps d'obtenir des résultats préliminaires concernant les transformations de Möbius afin de regarder l'action du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, identifié aux automorphismes de la droite projective complexe sur cette dernière. Pour ensuite, définir de manière rigoureuse un groupe de Schottky, qui peut être construit de la manière suivante : prendre $2n$ disques disjoints dans la sphère de Riemann les associer par couples et choisir pour chaque couple une transformation de Möbius qui envoie chaque disque sur le complémentaire de l'autre disque. On obtient alors n transformation de Möbius qui engendrent un groupe nommé groupe de Schottky. Nous obtiendrons alors quelques résultats importants tels que la liberté d'un tel groupe. Enfin, il s'agira de comprendre la dynamique d'un groupe de Schottky par le biais d'une simulation informatique et aborder brievement les ensembles limites pour les groupes de Schottky.

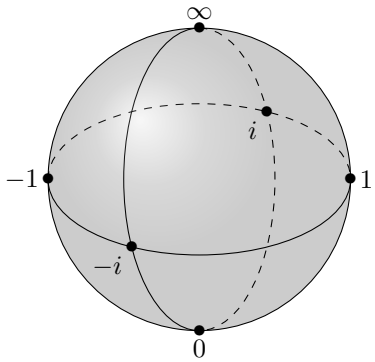
2 Définitions et résultats immédiats

Définition 1. Un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$ est dit *localement compact* si tout point $x \in X$ possède un voisinage compact dans X

Définition 2. Soit X un espace topologique localement compact. On pose $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ que l'on munit de la topologie suivante : les ouverts de $\widehat{X}$ inclus dans X sont les ouverts de X, et les ouverts de $\widehat{X}$ contenant $\{\infty\}$ sont les complémentaires des compacts de X

En posant, $X = \mathbb{C}$, on obtient alors un modèle nommé la *sphère de Riemann* qui est définit comme un modèle du plan complexe étendu : le plan complexe et un point à l'infini. On le note $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

On peut se la représenter de la manière suivante :



Proposition 1 ([6])**.** *Soit X un espace topologique de Hausdorff localement compact, munit de la topologie définit ci-dessus. Alors, $\widehat{X}$ est un espace de Hausdorff compact.*

Remarque. La définition de $\mathbb{CP}^1$ nous permet d'obtenir une structure complexe, qui nous permet de travailler sur $\widehat{\mathbb{C}}$ en coordonnées. En effet, ces deux espaces ($\mathbb{CP}^1$ et $\widehat{\mathbb{C}}$) représentent la même chose, cependant la définition de $\mathbb{CP}^1$ est nécessaire afin d'avoir un espace munit d'une structure de variété complexe.

On définit l'espace projectif complexe qui nous permet de travailler en coordonnées sur la sphère de Riemann.

Définition 3. *L'espace projectif complexe*, noté $\mathbb{CP}^1$, est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$ de dimension 1 munit de la projection naturelle :

$$\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{CP}^1$$

On peut alors définir l'espace complexe projectif, noté $\mathbb{CP}^1$, par :

$$\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence suivante :

$$z \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ z = \lambda w$$

On note $\mathbb{CP}^1 = \{[x:y], (x,y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim\}$ où $[x:y] = [\lambda x : \lambda y]$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Ainsi définit, chaque point de $\mathbb{CP}^1$ correspond à une droite vectorielle de $\mathbb{C}^2$, et a un point de $\mathbb{CP}^1$ correspond une et une seule droite vectorielle de $\mathbb{C}^2$.

En effet, l'espace projectif, $\mathbb{CP}^1$, possède une structure de variété complexe puisque l'on peut définir un atlas, dont les cartes sont données par les *cartes affines* :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{CP}^1 \setminus [1:0] \simeq \{[x:1] \mid x \in \mathbb{C}\} &\to \mathbb{C}, \\ [x:1] &\mapsto x \end{aligned}$$

$$\psi : \mathbb{CP}^1 \setminus [0:1] \simeq \{[1:y] \mid y \in \mathbb{C}\} \to \mathbb{C},$$
$$[1:y] \mapsto y$$

Avec les recollements des cartes affines qui sont donnés par :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1],[1:0]\} \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1],[1:0]\} \arrow[dl, "\psi"] \\
& \mathbb{CP}^1 &
\end{tikzcd}$$

avec

$$\gamma([x:1]) = \left[1 : \frac{1}{x}\right]$$

Remarque. On peut identifier $\mathbb{CP}^1$ en tant qu'espace topologique à $\widehat{\mathbb{C}}$. Les cartes affines définies nous donnent une structure complexe sur $\widehat{\mathbb{C}}$. On considère alors $\widehat{\mathbb{C}}$ munit de la structure complexe induite.

Définition 4. On appelle *transformation de Möbius* un automorphisme de $\mathbb{CP}^1$. On note $\mathrm{Mob}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$ l'ensemble des transformations de Möbius.

Théorème 1.

$$\mathrm{Mob}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

où $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ *agit sur* $\widehat{\mathbb{C}}$ *via :*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\},\ f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

et avec les conventions

- $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$
- *Si* $c \neq 0$ $f(\infty) = \frac{a}{c}$
- *Si* $c = 0$, $f(\infty) = \infty$

La preuve de se théorème se décompose en plusieurs étapes :

Remarque. On rappelle que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est défini par :

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$$

Définition 5. On définit $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \coloneqq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$

Lemme 1. *L'application :*

$$\phi : (\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \times) \to \left(\mathrm{Mob}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right), \circ\right)$$
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto A.z \coloneqq \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

est surjective.

Démonstration. Pour commencer, montrons que notre application est un morphisme de groupe. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ deux matrices dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. On a :

$$\begin{aligned}
\phi(AB)(z) &= \phi\left(\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\right)(z) \\
&= \frac{(ae+bg)z + (af+bh)}{(ce+dg)z + (cf+dh)} \\
&= \frac{a\frac{ez+f}{gz+h} + b}{c\frac{ez+f}{gz+h} + d} \\
&= \phi(A) \circ \phi(B)(z)
\end{aligned}$$

Donc ϕ défini bien un morphisme de groupe entre $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \times)$ et $(\mathrm{Aut}\left(\mathbb{CP}^1\right), \circ)$. Montrons maintenant que ϕ est un surjective. Soit $f \in \mathrm{Mob}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$, et notons $z_0 := f(\infty)$. Quitte à composer f par l'application représentée par la matrice $M_{z_0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -z_0 \end{pmatrix}$, on peut supposer que $f(\infty) = \infty$. Quitte à restreindre f sur $\mathbb{C}$, on peut considérer f comme un automorphisme. Ainsi, f est une bijection holomorphe, de réciproque elle aussi holomorphe, on parle de *biholomorphisme*. On pose alors g telle que $\forall z \in \mathbb{C},\ g(z) := f(1/z)$. On sait alors que 0 est une singularité isolé de g. De plus, comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, (on dit que f est entière). Donc :

$$\exists (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

D'où

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

Ainsi, on sait que la singularité en 0 est soit une singularité éliminable, soit une singularité essentielle, soit un pôle

- Si 0 est une singularité éliminable alors d'après le théorème de Riemann, il existe un voisinnage V tel que f est bornée sur $V \setminus \{0\}$. De plus, par le théorème de Liouville, on obtient alors que f est constante sur $V \setminus \{0\}$. Ce qui est absurde car f est bijective donc injective.
- Si 0 est une singularité essentielle, alors pour tout voisinnage ouvert V de 0, on a :

  $$\overline{g(V \setminus \{0\})} = \mathbb{C}$$

  Donc $g(V \setminus \{0\}) \cap U \neq \emptyset$ pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$. Or, pour $V = \mathbb{D}(0,1)$ et $U = \mathbb{D}(5,1)$. On a $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, non constante donc le théorème de l'application ouverte implique que $g(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Donc par ce qui précède,

  $$g(\mathbb{D} \setminus \{0\}) \cap g(U) \neq \emptyset$$

  Donc $\exists a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \exists b \in \mathbb{D}(5,1), g(a) = g(b)$. Or $a \neq b$ donc cela contredit l'injectivité de g.
- Ainsi, par élimination, 0 est nécessairement un pôle de g. On note N son ordre. Donc comme 0 est un pôle d'ordre N de g et que g est holomorphe sur $\mathbb{C}$, on a :

  $$\forall z \in \mathbb{C}^*, g(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{z^n}$$

  D'où $f(z) = g(1/z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. Donc f est une fonction polynomiale, bijective par hypothèse. Or f est bijective si, et seulement si, $deg(f) = 1$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Donc pour tout $f \in \mathrm{Mob}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$, on a nécessairement, $\phi(M_{z_0}) \circ f(z) = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Autrement dit

$$f = \phi(M_{z_0}^{-1}) \circ \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} -az_0 & -bz_0 + 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}\right)$$

D'où $\mathrm{Mob}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et donc $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{Aut}\left(\mathbb{CP}^1\right)$ est surjectif. □

Proposition 2. *Le morphisme* $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{CP}^1\right)$ *se factorise sur* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$*, i.e. le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathrm{Mob}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right) \\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

commute.

La preuve de se lemme se fait également en plusieurs étapes, on montre d'abord que le morphisme ϕ se factorise sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. et ensuite, on montre que ce morphisme se factorise une nouvelle fois sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Lemme 2. *A partir d'une transformation de Mobiüs donnée, on peut toujours se ramener à une transformation dont le déterminant vaut* 1.

Démonstration. On montre que l'on peut réduire le domaine de ϕ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Soit $f = \phi(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. La multiplication de la matrice A par un scalaire ne change pas l'application f. En effet, si l'on prend la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on obtient la transformation de Mobiüs $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ et si l'on prend la matrice $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$, on obtient la transformation de Mobiüs associée $\phi(\lambda A) = \dfrac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \dfrac{az+b}{cz+d} = f(z)$. Donc on voit bien que la multiplication de A par un scalaire ne change pas l'application f. □

Remarque. Par le lemme précédent, on obtient alors que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, le morphisme

$$\begin{aligned} \phi_\lambda : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) &\to \mathrm{Mob}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right) \\ A &\mapsto (z \mapsto \phi(\lambda A)(z)) \end{aligned}$$

vérifie $\phi_\lambda = \phi$. Donc en prenant $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{ad-bc}}$, on obtient un nouveau morphisme :

$$\begin{aligned} \phi_\lambda : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) &\to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{CP}^1\right) \\ (A' = \lambda A) &\mapsto (z \mapsto A'.z) \end{aligned}$$

Ainsi, par le lemme précédent et la remarque précédente, on possède une factorisation de ϕ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ comme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathrm{Mob}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right) \\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Montrons que ce nouveau morphisme ψ se factorise à nouveau sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Définition 6. Soit G un groupe. On appelle le *centre* de G l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres. On note le note généralement :

$$Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in G, zg = gz\}$$

Lemme 3. $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *stabilise* $\mathbb{CP}^1$ *si, et seulement si,* A *est dans le centre de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Démonstration. On sait que $Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \{\pm I_2\}$. Soit $z \in \mathbb{CP}^1$ et $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} A.z = z \Leftrightarrow\ & \frac{az+b}{cz+d} = z \\ \Leftrightarrow\ & cz^2 + (d-a)z - b = 0 \\ \Leftrightarrow\ & c = d - a = b = 0 \\ \Leftrightarrow\ & A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & A = \pm \mathrm{Id} \ \text{ car } \ \det(A) = 1 \end{aligned}$$

□

Corollaire. *On a alors* $\ker(\psi) = \{\pm \mathrm{Id}\}$

Le noyau de ψ est :

$$\ker(\phi) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mid A.z = z, \forall z \in \mathbb{CP}^1\} = \{\pm \mathrm{Id}\}$$

Preuve du Lemme 2. Il nous reste plus qu'à appliquer le théorème de factorisation. Ainsi, on a $\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{CP}^1\right)$ et $\ker(\psi) = \{\pm \mathrm{Id}\}$, et ψ est surjective. Donc par le théorème de factorisation, ϕ induit un isomorphisme

$$\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\} \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{CP}^1\right)$$

□

Ce qui achève bien la preuve du théorème. Donc on a bien $\mathrm{Aut}\left(\mathbb{CP}^1\right) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$

Proposition 3. *Une transformation de Möbius* $\Phi(A)$*, avec* $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \setminus [\mathrm{Id}]$ *possède* 1 *ou* 2 *points fixes. De plus, on a :*

1. $\Phi(A)$ *possède un unique point fixe* $\Leftrightarrow \mathrm{Tr}(A) = \pm 2$,
2. $\Phi(A)$ *possède deux points fixes sinon.*

Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$.

Ainsi, trouver les points fixes de $\Phi(A)$ revient à résoudre l'équation $\Phi(A)(z) = z$

$$\begin{aligned} \Phi(A)(z) = z &\Leftrightarrow az + b = cz^2 + dz \\ &\Leftrightarrow -cz^2 + (a-d)z + b = 0 \end{aligned}$$

— Si $c \neq 0$:

$$\begin{aligned} \Delta =& (a-d)^2 + 4cb \\ =& a^2 - 2ad + d^2 + 4bc \\ =& a^2 - 4ad + 4bc + d^2 + 2ad \\ =& a^2 - 4(ad - bc) + 2ad + d^2 \\ =& (a+d)^2 - 4 \\ =& (a+d+2)(a+d-2) \\ =& (\mathrm{Tr}(A) + 2)(\mathrm{Tr}(A) - 2) \end{aligned}$$

— Si $c = 0$ on a deux sous cas :

1. Si $a = d = \pm 1$ (on a nécessairement $b \neq 0$ car $A \neq [\mathrm{Id}]$). Alors $\Phi(A)(z) = z \Leftrightarrow (a-d)z + b = 0$. Donc il n'y a pas de solutions dans $\mathbb{C}$. Mais $\Phi(A)(\infty) = \infty$.
2. Si $a \neq d$ alors $d = a^{-1}$, $\Phi(A)(z) = \dfrac{az+b}{d}$ on voit alors que $\Phi(A)$ possède deux points fixe $z = \frac{-b}{a-d}$ et le point $z = \infty$

□

Définition 7. On peut alors définir plusieurs types de transformations de Möbius :

— Les *transformations paraboliques* qui sont représentées par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui possèdent 1 points fixe.

— Les *transformations elliptiques* qui sont représentées par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$ qui possèdent 2 points fixes.

— Les *transformations loxodromiques* qui sont représentées par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, avec $|\lambda| \neq 1$ qui possèdent 2 points fixes.

On cherche maintenant à décomposer une transformation de Mobiüs en une composé de fonction, et l'on obtient la proposition suivante.

Proposition 4. *Le groupe* $\mathrm{Mob}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$ *est engengré par les applications de la forme :*

$$z \mapsto \lambda z, \quad z \mapsto \frac{1}{z} \quad et \quad z \mapsto z + b$$

Démonstration. Comme précédemment, soit $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ On remarque alors qu'une transformation de Mobiüs est simplement la composée de translations, de fonctions linéaires et de la fonction inverse. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(A)(z) =& \frac{az+b}{cz+d} \\
=& \frac{a}{c} + \frac{e}{z+\frac{d}{c}} \text{ avec } e = \frac{b-ad}{c^2} \\
=& \left(\frac{a}{c} + z\right) \circ \left(\frac{e}{z+\frac{d}{c}}\right) \\
=& \left(\frac{a}{c} + z\right) \circ (ez) \circ \left(\frac{1}{z}\right) \circ \left(z + \frac{d}{c}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, toutes les transformations de Möbius sont engendrées par les applications définies plus haut. □

Proposition 5. *L'image d'un cercle par une transformation de Mobiüs est un cercle.*

Démonstration. On a montré que toute transformation de Mobiüs peut s'écrire comme la composée de translations, homothéties et inversion. Il suffit alors de montrer que l'image d'un cercle par chacune de ces applications est un cercle. Il est clair que l'image d'un cercle par une homothétie et une translation est un cercle. Montrons que c'est aussi le cas pour une inversion. On considère un cercle C de centre z_0 et de rayon r. Quitte à composer par une translation et une homothétie, on peut supposer que $z_0 = 0$ et $r = 1$. Le module de l'image d'un complexe de module 1 par l'inversion est encore 1. Donc l'image du cercle unité par l'inversion est le cercle unité. □

Remarque. On remarque que l'on peut toujours, par une translation se ramener à l'étude du cercle centré à l'origine et de rayon r. Ainsi, en appliquant le premier générateur à ce cercle, puis le cercle obtenu au second générateur et ainsi de suite. On obtient alors :

Transformations	Centres	Rayons
$f \mapsto z + \frac{d}{c}$	$\frac{d}{c}$	r
$f \mapsto \frac{1}{z}$	$\frac{\overline{d}.\lvert c\rvert^2}{\overline{c}(\lvert d\rvert^2 - \lvert c\rvert^2 r^2)}$	$\frac{\lvert c\rvert^2}{\lvert c\rvert^2 r^2 - \lvert d\rvert^2}$
$f \mapsto e.z$	$\frac{e.\overline{d}.\lvert c\rvert^2}{\overline{c}(\lvert d\rvert^2 - \lvert c\rvert^2 r^2)}$	$\frac{e\lvert c\rvert^2}{\lvert c\rvert^2 r^2 - \lvert d\rvert^2}$
$f \mapsto z + \frac{a}{c}$	$\frac{e.\overline{d}.\lvert c\rvert^2}{\overline{c}(\lvert d\rvert^2 - \lvert c\rvert^2 r^2)} + \frac{a}{d}$	$\frac{\lvert e\rvert^2\lvert c\rvert^2}{\lvert c\rvert^2 r^2 - \lvert d\rvert^2}$

Ainsi, en simplifiant les calculs on obtient que l'image du cerce de centre 0 et de rayon r par une transformation de Mobiüs de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est un cercle de centre $\frac{(bc-ad).\overline{d}}{c(\lvert d\rvert^2 - \lvert c\rvert^2 r^2}$ et de rayon $\frac{\lvert bc-ad\rvert}{\lvert c\rvert^2 r^2 - \lvert d\rvert^2}$

3 Groupes de Schottky

Il devient alors nécessaire de développer quelques notions de groupes afin d'introduire la notion de groupe de Schottky.

Remarque. La notion qui nous intéresse n'est pas la notion de groupe discret car on peut munir chaque groupe de la topologie discrète mais nous allons plutôt nous intéresser à la notion de sous-groupe discret.

Soit X un ensemble quelconque. On définit la topologie discrète comme l'ensemble des parties parties de X, notée $\mathcal{P}(X)$.

Ainsi, X est munit de la topologie discrète lorsque tout sous-ensemble de X sont des ouverts.

Définition 8. Un *groupe topologique* est un groupe G qui est un espace topologique tel que la multiplication $(g, h) \mapsto gh$ et l'inversion $g \mapsto g^{-1}$ dans G soient des fonctions continues.

Définition 9. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et Y un sous-ensemble. On appelle *topologie induite* par $(X, \mathcal{T})$ sur Y, la topologie $\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}$

Définition 10. Soit G un groupe topologique et Γ un sous-groupe de G. On dit que Γ est un sous-groupe discret de G si la topologie induite par G sur Γ est discrète.

Exemple. Les exemples les plus classiques pour illustrer cette notion sont :

— On peut voir (le plongement naturel de) $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ comme un sous-groupe de $\mathbb{R}$ munit de la topologie usuelle (les ouverts de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ouverts), ainsi, la topologie induite sur $\mathbb{Z}$ est discrète. Donc, on peut voir $\mathbb{Z}$ comme un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.

— $\mathbb{Q}$ n'est pas un sous-groupe discret car il est dense dans $\mathbb{R}$ (tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels, la topologie induite ne permet jamais d'avoir les parties de $\mathbb{Q}$).

— $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Démonstration. Soient $f : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ le morphisme défini par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, b, c, d)$ et l'inclusion naturelle $g : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & & \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \arrow[dl, "f"] \\ & \mathbb{R}^4 & \end{tikzcd}$$

De plus, si on prend $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ on a $f \circ g(A) = (a, b, c, d)$ or les coefficients de A sont entiers donc on a $f \circ g(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \subset \mathbb{Z}^4$. Or $\mathbb{Z}^4$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^4$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, le plongement de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R}^4$ est discret puisqu'il est inclus dans $\mathbb{Z}^4$. De plus, la topologie de $\mathbb{R}^4$ ramené à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est la même que celle de $\mathbb{R}^4$. Or le plongement de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R}^4$ est discret, donc $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. □

Définition 11. On appelle *groupe Klenien*, un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Exemple.

— Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

— Les groupes de congruences. Exemple :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a \equiv 0 \; [p] \right\}$$

avec p premier.

— Les groupes de Bianchi. Exemple : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Définition 12. Soient G un groupe et $x \in G$. On appelle *orbite* de l'élément x sous l'action de G l'ensemble :

$$G_x = \{g.x \mid g \in G\}$$

Définition 13. Un groupe klénien G est dit *élémentaire* si G a une orbite finie dans $\mathbb{CP}^1$. C'est à dire si : $\exists z \in \mathbb{CP}^1,\ \#G_z < \infty$

Proposition 6. *Si G un groupe de Schottky, alors G est non-élémentaire.*

Démonstration. On admettra ce résultat. □

Proposition 7. *Soit $(A, B) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ et soit $G = \langle A, B\rangle$ tel que G soit non-élémentaire. Alors G est non-abélien.*

Démonstration. Soit $G = \langle A, B\rangle$ un groupe non élémentaire. On suppose par l'absurde que G abélien. On note

$$(\mathbb{CP}^1)^A := \{z \in \mathbb{CP}^1 \mid A.z = z\}$$

l'ensemble des points fixes de A, on utilisera la même notation pour B. On sait d'après ce qui précède que A et B possèdent au plus 2 points fixes, on a donc $\#(\mathbb{CP}^1)^A \leq 2$ et $\#(\mathbb{CP}^1)^B \leq 2$ D'une part, on a : Soit $z \in (\mathbb{CP}^1)^A$, on a alors, $A.z = z$.

$$z \in (\mathbb{CP}^1)^A \implies AB.z = BA.z = B.z \implies B.z \in (\mathbb{CP}^1)^A \tag{1}$$

D'autre part : Soit $\omega \in G$, ω est un mot de G en A et en B. On peut alors écrire :

$$\omega = \prod_{i=1}^{p} X_i^{\epsilon_i} \text{ où } \epsilon_i = \pm 1 \text{ et } X_i \in \{A, B\}$$

Or A et B commutent donc : $\exists (n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\omega = A^n B^m$. Pour $z \in (\mathbb{CP}^1)^A$, on a : $\omega.z = A^n B^m.z = B^m.z \in (\mathbb{CP}^1)^A$ d'après (1). Ainsi, on obtient alors l'existence d'un $z \in (\mathbb{CP}^1)^A$ tel que l'ensemble $\{\omega.z \mid \omega \in G\}$ soit inclus dans $(\mathbb{CP}^1)^A$. On sait également que le cardinal de $\#(\mathbb{CP}^1)^A$ est inférieur où égal à 2.

On a alors :

$$\exists z \in \mathbb{CP}^1, \#\{\omega.z | \omega \in G\} \leq 2 < \infty$$

Ce qui signifie que G possède une orbite finie. Par définition, G est élémentaire, or cela est impossible car on supposé que G ne l'était pas. Donc cela contredit le caractère abélien de G. On a alors montré que G non-élémentaire implique nécessairement que G est non abélien. □

On introduit maintenant différentes notions autour des groupes de Schottky.

Définition 14. On appelle *courbe de Jordan*, une application continue,fermée et simple $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{CP}^1$. Où :

— fermée signifie

$$\gamma(0) = \gamma(1)$$

— simple signifie

$$\forall (s, t) \in [0, 1]^2 \text{ tels que } 0 < s \leq t < 1, \gamma(s) = \gamma(t) \Rightarrow s = t$$

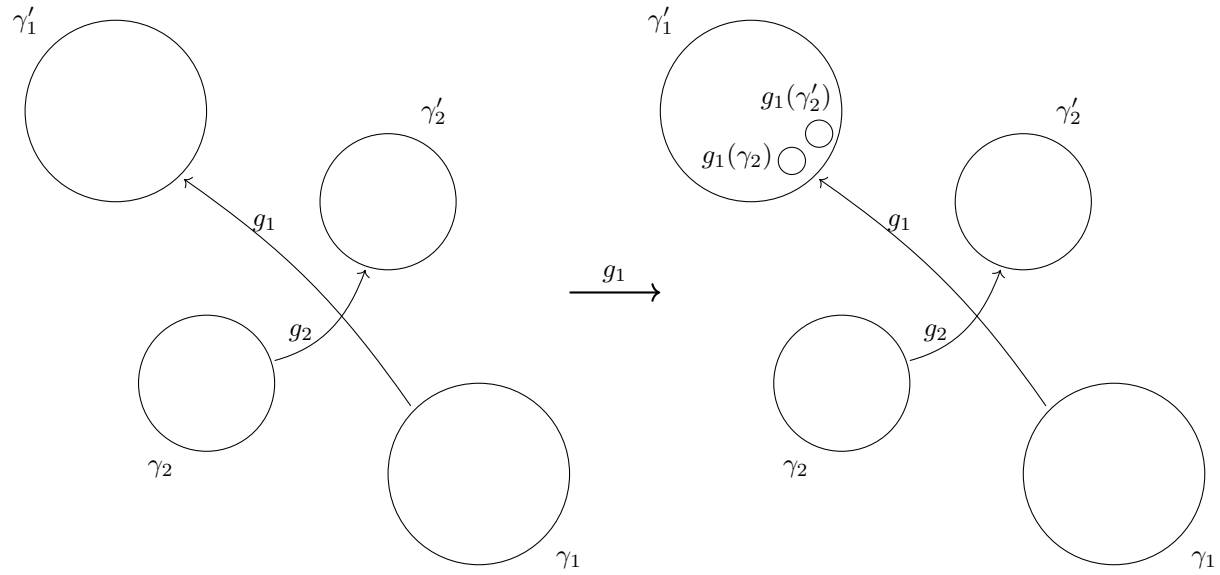
Remarque. En appliquant le théorème de Jordan sur les cartes, on sait qu'une courbe de Jordan divise la sphère de Riemann en deux parties. Une partie intérieur et une partie extérieure.

Définition 15. Soit γ une courbe de Jordan. La *partie intérieure* est l'ouvert de frontière γ qui ne contient pas le point à l'infini de $\mathbb{CP}^1$ que l'on notera $\mathring{\gamma}_i$. La *partie extérieure* est le complémentaire de la clôture de la partie intérieure.

Définition 16. Soit $\{(\gamma_i, \gamma_{i'})\}_{1 \leq i, i' \leq n}$ un ensemble de $2n$ courbes de Jordan deux à deux disjointes de $\widehat{\mathbb{C}}$. Soit $\{(g_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ un ensemble de n transformation de Möbius telles que, pour tout i, g_i envoie l'intérieur de γ_i sur l'extérieur de $\gamma_{i'}$ et telles que $g_i(\gamma_i) = \gamma_i'$.

On appelle groupe de Schottky le groupe engendré par les $\{(g_i)\}_{1 \leq i \leq n}$

Exemple. On peut alors voir un groupe de Schottky représenté de la manière ci-contre.



Exemple. On va s'intéresser à un exemple précis dans un cas simple. Tout d'abord, trouvons la transformation de Môbius qui transforme l'intérieur d'un cercle donné en l'extérieur d'un autre cercle donné. Soit $C(c_1, R_1)$ et $C(c_2, R_2)$ nos deux cercles. On se ramène d'abord au cercle unité par une succession de compositions. Soit z dans le cercle $C(c_1, R_1)$. Ainsi, on pose : $z_1 : z \mapsto z - c_1$ et $z_2 : z \mapsto \dfrac{1}{R_1}c_1 = \dfrac{z - c_1}{R_1}$. Ainsi, l'image de $C(c_1, R_1)$ par $z_2 \circ z_1$ est le cercle unité. On inverse alors l'intérieur et l'extérieur par la transformation $z_3 : z \mapsto \dfrac{1}{z}$. Puis on reconstruit le cercle $C(c_2, R_2)$ grâce aux applications $z_4 : z \mapsto R_2.z$ puis $z_5 : z \mapsto z + c_2$. Ainsi, la transformation de Möbius qui transforme l'intérieur de $C(z_1, R_1)$ en l'extérieur de $C(z_2, R_2)$ et donnée par :

$$f(z) = z_5 \circ z_4 \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1(z) = \frac{R_1.R_2}{z - c_1} + c_2$$

On va s'intéresser aux 4 cercles suivants : $C(6i, 4)$, $C(-6i, 4)$, $C(5, 3)$ *et* $C(-5, 3)$. On notera $\gamma_1 = C(6i, 4)$, $\gamma_1' = C(-6i, 4)$ et $\gamma_2 = C(5, 3)$, $\gamma_2' = C(-5, 3)$. Ainsi, on obtient $g_1(z) = \dfrac{16}{z - 6} - 6$ et $g_2(z) = \dfrac{9}{z - 5} - 5$. Voir 1.

Définition 17. Soit G un groupe de Schottky. On appelle *marquage*, la donnée de $2n$ courbes $\{(\gamma_i, \gamma_i')\}_{1 \leq i \leq n}$ et la donnée de n transformations de Möbius $\{g_i\}_{1 \leq i \leq n}$ telles que $\forall i \in [\![1, n]\!], g_i(\gamma_i) = \gamma_i'$ et telle que g_i envoie l'intérieur de γ_i sur l'extérieur de γ_i' et telles que $G = \langle g_i \rangle_{1 \leq i \leq n}$

Définition 18. Soit G un groupe de Schottky.

- Si il existe un marquage de G tel que les courbes de Jordan sont des cercles. On dit que G est un *groupe de Schottky classique.*
- Sinon G est dit *non-classique.*

Remarque. Lors du développement de la théorie des groupes de Schottky, les mathématiciens avaient conjecturé que tous les groupes de Schottky étaient classiques. Cette conjecture perdura de nombreuses années jusqu'à ce que Yamamoto trouve un contre exemple [7].

Définition 19. Soit X un ensemble. On note $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$.

- On appelle *mot* de $X \cup X^{-1}$ de taille m, un produit de la forme $\prod_{i=1}^{m} x_i$ où $x_i \in X \cup X^{-1}, \forall i \in [\![1; m]\!]$.
- On dit qu'un mot est *réduit* si il ne possède pas de sous-mot du type xx^{-1} ou $x^{-1}x$.

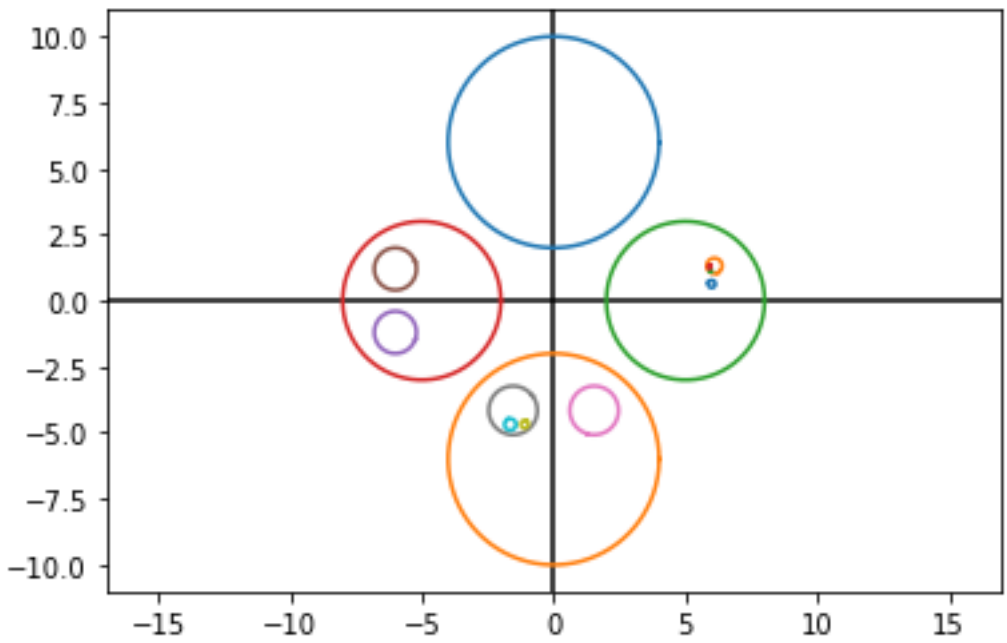


FIGURE 1 – Image des 4 cercles par la transformation $g_2^{-1}g_1g_2$ obtenu par le code en Annexe

Remarque. Ici, lorsque l'on définit $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$, on parle d'inverse formel. En effet, on verra plus tard que notre ensemble noté ici X représente un groupe et donc que la notion d'inverse est bien définie.

Lemme 4 (Lemme du Ping-Pong)**.** *Soit G un groupe agissant sur un espace X. Soit $k \geq 2$. Soit $H_1, ..., H_k$ des sous-groupes de G tels que au moins l'un d'entre eux soit d'ordre strictement supérieur à 2.*

Si il existe $X_1, ..., X_k$ contenus dans X, deux à deux disjoints vérifiant :

$$\forall i \neq j, \forall h \in H_i \setminus \{1\}, h(X_j) \subset X_i$$

Alors $\langle H_1, ..., H_k \rangle \cong H_1 * ... * H_k$

Démonstration. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Soit $k \geq 2$ et soit $H_1, ..., H_k$ des sous-groupes de G tels que au moins l'un d'entre eux soit d'ordre strictement supérieur à 2.

On suppose qu'il existe $X_1, ..., X_k$ deux à deux disjoints tels que $\forall i \in [\![0; k]\!], X_i \subset X$ vérifiant : $\forall i \neq s, \forall h \in H_i \setminus \{1\}, h(X_s) \subset X_i$.

On veut montrer que $< H_1, ..., H_k > \simeq H_1 * ... * H_k$. Pour montrer cela, il suffit de montrer qu'un montrer qu'un mot réduit représente un élément non-trivial de G.

Soit $\omega \in G$ un mot réduit de longueur $m \geq 2$, on a alors : $\omega = \prod_{i=1}^{n} \omega_i$ avec $\omega_i \in H_{\alpha_i}$ où $\alpha_i \in \{1, ...k\}$. Comme ω est un mot réduit, $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}, \forall i \in [\![1; n-1]\!]$ et par hypothèse, $\omega_i \neq \{1\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que H_1 est d'ordre strictement supérieur à 2, et que $\alpha_1 = \alpha_n = 1$.

On fait ensuite agir ω sur X_2 et comme on sait que $\forall i \neq s, \forall h \in H_i \setminus \{1\}, h(X_s) \subset X_i$. On a alors :

$$\omega(X_2) \subseteq \left(\prod_{i=1}^{n} \omega_i\right)(X_2) \subseteq \left(\prod_{i=1}^{n-1} \omega_i\right)\omega_n(X_2) \subseteq \left(\prod_{i=1}^{n-1} \omega_i\right)(X_1) \subseteq \left(\prod_{i=1}^{n-2} \omega_i\right)(H_{\alpha_n - 1}) \subseteq \omega_1(X_{\alpha_2}) \subseteq X_1$$

On a alors : $\omega(X_2) \subseteq X_1$ or on sait que les sous-ensembles de X notés X_i sont deux à deux disjoints. D'où si $\omega = \{1\}$, on aurait $X_2 \subseteq X_1$, ce qui est impossible pluisque $X_1 \bigcap X_2 = \emptyset$. Donc $\omega \neq \{1\}$. On a donc ω qui n'est pas un mot trivial de G.

On obtient alors le résultat souhaité : $\langle H_1, ..., H_k \rangle \simeq H_1 * ... * H_k$ □

Corollaire. *Un groupe de Schottky est libre.*

Démonstration. Soit G un groupe de Schottky et $\{\gamma_i, \gamma_i', g_i\}_{1 \leq i \leq k}$ un marquage. On pose alors : $\forall i \in [\![1; k]\!], H_i = \langle g_i \rangle$ et

$$X_i \coloneqq \mathring{\gamma}_i \cup \mathring{\gamma}_i{}'$$

$X_i = \{$l'intérieur de γ_i et l'intérieur de $\gamma_i'\}$. On veut alors appliquer le Lemme du Ping-Pong, donc on va vérifier les hypothèses de celui-ci.

- Les X_i sont 2 à 2 disjoint puisque par définition, les γ_i et γ_i' le sont.
- Soit $i \neq j$, soit $h \in H_i \setminus \{1\}$, on peut alors dire que : $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $h = g_i^n$. On va alors montrer par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_i^n(X_j) \subset X_i$
  - Initialisation : n = 1

    $$g_i(X_j) = g_i(\mathring{\gamma}_j \cup \mathring{\gamma}_j{}') \subset g_i((\mathring{\gamma}_i \cup \mathring{\gamma}_i{}')^c) \subset \mathring{\gamma}_i \cup \mathring{\gamma}_i{}'$$

    car $\mathring{\gamma}_j \cup \mathring{\gamma}_j{}' \subset (\mathring{\gamma}_i \cup \mathring{\gamma}_i{}')^c$. et g_i envoie l'extérieur de γ_i dans l'intérieur de γ_i' et l'extérieur de γ_i' dans l'intérieur de γ_i.
  - Hérédité : En remarquant que l'intérieur de γ_i' est contenu dans l'extérieur de γ_i et que l'image d'un point de γ_i' par g_i reste dans γ_i'. On sait que $g_i^{n_1}(X_j) \subset \mathring{\gamma}_i'$. Donc par la remarque précédente $g_i^n(X_j) \subset \mathring{\gamma}_i' \subset X_i$
  - Conclusion : On a bien montré que notre hypothèse de récurrence était vraie pour $n = 0$ et qu'elle était héréditaire. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_i^n(X_j) \subset X_i$

  Donc, un groupe de Schottky G, vérifie les hypothèses du Lemme du Ping-Pong. Ainsi, par ce Lemme, on obtient que tout groupe de Schottky G est un groupe libre.

$\square$

4 Orbites et Ensembles Limites

La motivation de cette partie était de visialiser informatiquement l'orbite d'un point par un groupe engendré par deux éléments. L'idée était donc d'afficher tous les points de la forme $g.z$ où $g \in G = \langle A, B \rangle$. Pour cela, il était nécessaire de procéder par étapes. Il fallait d'abord réussir à écrire tous les mots réduis en A et B. Pour cela, j'ai procédé de la manière suivante. Il fallait trouver un moyen d'écrire d'abord tous les mots en A, B, A^{-1} et B^{-1}. Ainsi, j'ai traduis cela en base 5 avec la représentation suivante, le 0 encodait la matrice Id, le 1 encodait la matrice A, le 2 la matrice A^{-1}, le 3 la matrice B et le 4 la matrice B^{-1}. Pour cela, j'ai crée une fonction qui avait pour argument un entier et renvoyait son écriture en base 5. Ensuite, j'ai codé une fonction qui regardait l'irréductibilité du nombre obtenu, ce qui traduisait l'irréductibilité du mot qu'il représentait. Dès lors qu'un nombre en base 5 contenait un motif de la forme "0" ou "12" ou "21" ou "34" ou "43" cela signifiait que le mot qui représentait contentait un sous-mot de la forme "Id", AA^{-1}, $A^{-1}A$, BB^{-1} ou encore $B^{-1}B$. Il faut ensuite prendre un nombre entier n assez grand, trouver tous les nombres entre 1 et n qui sont irréductibles en base 5. Puis traduire ces nombres en un mot en A et B. Pour enfin afficher l'ensemble des points $g.z$ où les g sont nos mots irréductibles.

```
import cmath
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def base5(n) : #prend un entier n et le renvoie en base 5
    resultat = ""
    while n>0 :
        if n % 5 == 0 :
            resultat = "0" + resultat
        if n % 5 == 1 :
            resultat = "1" + resultat
        if n % 5 == 2 :
            resultat = "2" + resultat
        if n % 5 == 3 :
            resultat = "3" + resultat
        if n % 5 == 4 :
            resultat = "4" + resultat
        n = n//5
    return list(resultat)


def reversebase5(s) :
    resultat = 0
    for k in range(0,len(s)) :
        resultat = resultat + s[k]* (5**(len(s)-(k+1)))
    return resultat


def test(liste) : #prend une liste repr sentant un nombre en base 5
    if liste[0] == '0' :
        return "reductible"
    for k in range (1,len(liste)) :
        if liste[k] == '0' : # On enleve les mots contenant l'identite
            return "reductible"
        elif liste[k-1] == '1' and liste[k] == '2' :
            # On enleve les mots contenant les sous-mots de type AA^{-1}
            return "reductible"
        elif liste[k-1] == '2' and liste[k] == '1' :
            # On enleve les mots contenant les sous-mots de type A^{-1}A
```

```
            return "r ductible"
        elif liste[k-1] == '3' and liste[k] == '4' :
            # On enleve les mots contenant les sous-mots de type BB^{-1}
            return "reductible"
        elif liste[k-1] == '4' and liste[k] == '3' :
            # On enleve les mots contenant les sous-mots de type B^{-1}B
            return "reductible"
    return "irreductible"
    # Renvoie si le nombre en base 5 est irreductible, ce qui implique que le mot
    qu'il represente l'est aussi

def traduction(liste, A, B) : #Prend un nombre en base 5, ecrit sous forme de liste,
et une matrice A et B
    I = np.array([[1,0], [0,1]])
    mot = np.array([[1,0], [0,1]])
    for k in range (0, len(liste)) :
        if liste[k] == '0' :
            mot = np.dot(mot,I)
        if liste[k] == '1' :
            mot = np.dot(mot,A)
        if liste[k] == '2' :
            mot = np.dot(mot, np.linalg.inv(A))
        if liste[k] == '3' :
            mot = np.dot(mot,B)
        if liste[k] == '4' :
            mot = np.dot(mot,np.linalg.inv(B))
    return mot #Renvoit le mot associ  au nombre en base 5 en associant au numero 0
    l'identite, au numero 1 la matrice A, au numero 2 la matrice A^{-1}, au numero 3
    la matrice B, et au numero 4 la matrice B^{-1},

def listeirreductible(n) : #prend un nombre entier n
    l=[]
    for i in range(1,n) :
        if test(base5(i)) == "irreductible" :
            l.append(i)
    return l #renvoie la liste des nombres entre 1 et n  crit en base 5 qui
    sont irreductibles

def mot(A,B,n) : #Prend deux matrices A et B et un entier n
    ensemble_mot=[]
    l = listeirreductible(n)
    for i in range(0,len(l)) :
        m = base5(l[i])
        ensemble_mot.append(traduction(m,A,B))
    return ensemble_mot
    #Renvoie l'ensemble des mots en A et B irreductibles associes aux nombre entre 1
    et n en base 5

def mobius(A,z) :
    return (A[0][0]*z + A[0][1])/(A[1][0]*z + A[1][1])
    #Renvoie la transformation de Mobius associ e    la matrice A

def orbite(z,A,B,n) :
    ensemble_mot = mot(A,B,n)
    ensemble_point = []
    for k in range (0,len(ensemble_mot)) :
```

```
        ensemble_point.append(mobius(ensemble_mot[k],z))
    return ensemble_point
    #renvoie l'orbite de z par le groupe <A,B>

def affichage(z,A,B,n) :
    liste_point = orbite(z,A,B,n)
    plt.plot(np.real(liste_point) , np.imag(liste_point),'ro', markersize = 0.1)
    plt.xlim(-1.2, 1.2)
    plt.ylim(-1.2, 1.2)
    plt.show
    return
    # Affiche l'orbite du point z par le groupe <A,B>

def alea(i) :
    alea = np.random.uniform(low=0, high=10000, size=2*i).tolist()
    l=[]
    for j in range(0,len(alea)-1) :
        z = complex(alea[j], alea[j+1])
        l.append(z)
    return l
    # Renvoie la liste de i nombres complexes generes aleatoirement

def orbite_simultanne(A,B,n) :
    l = alea(n)
    for p in range(0,len(l)) :
        affichage(l[p], A, B, n)
    return
```

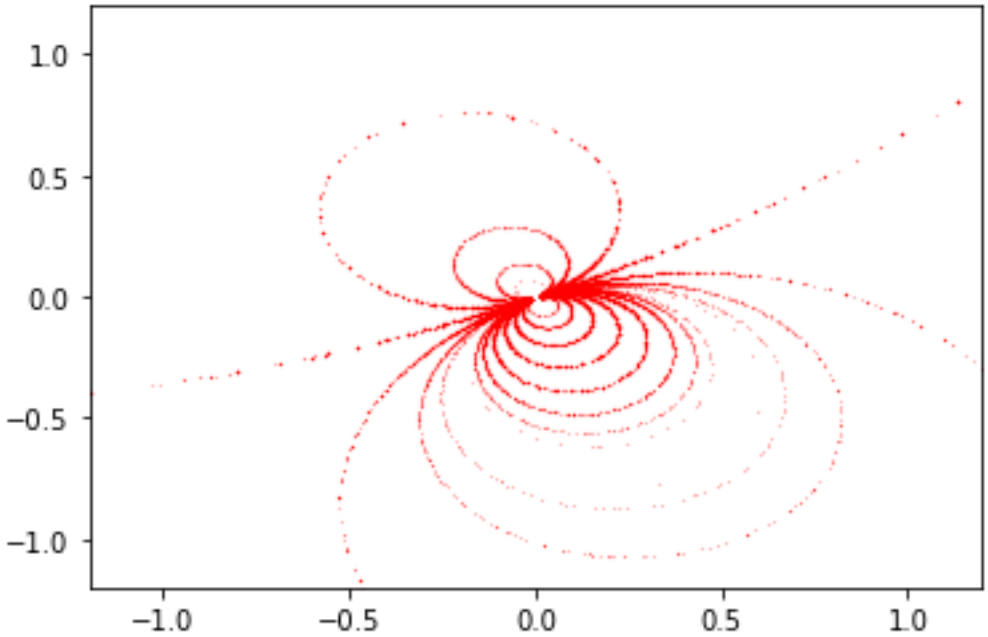


FIGURE 2 – $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 21 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4+2i & 1 \end{pmatrix}$ $z = 2 + 2i$

Cela nous permet de tracer plusieurs orbites comme celles-ci :

Ici, la matrice B est parabolique ce qui ne rentre pas dans le cadre des groupes de Schottky puisqu'ils sont purement loxodromique. Cela n'enlève en rien le caractère intéressant du dessin.

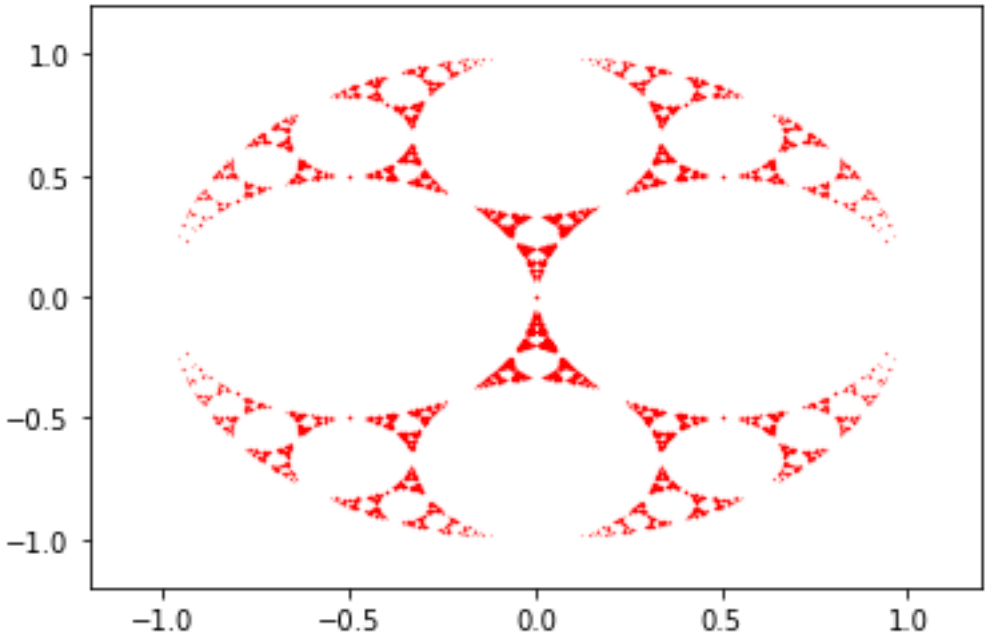


FIGURE 3 – $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$ $z = 0$

Définition 20. Soient a un point de la sphère de Riemann et G un groupe de Schottky. On dit que a est un *point limite* de G si il existe un point $x \in \mathbb{CP}^1$ et $\{g_i\}_{i\geq 1}$ des éléments de G tel que $\{g_i.x\}_{i\geq 1}$ converge vers a

Définition 21. Soit G un groupe de Schottky. On appelle *ensemble limite* de G, l'ensemble des points limites de G

Remarque. Il est intéressant de définir la notion d'ensemble limite car cela nous permettra de parler par la suite d'uniformisation de groupe de Schottky

Définition 22. Liberté

On dit que G agit librement sur X si :

$$\forall x \in X, G_x = \{e\}$$

Définition 23. Proprement discontinue

On dit que G agit de manière proprement discontinue sur X si pour tout compact K de X, l'ensemble suivant est fini :

$$\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

5 Ouverture

Nous pourrons, dans la continuité de ce projet, nous intéresser de plus près aux ensembles limites et aux propriétés qu'ils possèdent. En effet, ils possèdent un rôle particulier au sein des groupes de Schottky puisque c'est grâce aux ensembles limites qu'il a été prouvé l'existence de groupe de Scottky non-classique.C'est également grâce à eux que nous pouvons parler d'uniformisation de groupes de Schottky. Il est également possible de continuer notre construction de résultat autour des groupes de Schottky afin d'aboutir à une construction de ceux-ci. Cette proposition est fondamentale et très puissante puisqu'elle nous donne la forme d'un groupe de Schottky. Elle porte de nom de théorème de Maskit et est la suivante :

Théorème 2. *Un sous-groupe discret dans* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$*, purement loxodromique, libre et avec un domaine de discontinuité non vide est un groupe de Schottky.*

6 Annexe

```
def f(z, C1, C2):
    """
    z : complex, parameter
    Ci : (c, r)
        c : complex, center of circle
        r : float, radius of circle
    """

    return C2[0] + C1[1]*C2[1] / (z - C1[0])


if __name__ == "__main__":
    circle1 = (0+9j, 6.5)
    circle2 = (0-9j, 6.5)
    circle3 = (7+0j, 4)
    circle4 = (-7+0j, 4)

    circle1Parametrized = circleParametrization(circle1[0], circle1[1])
    circle2Parametrized = circleParametrization(circle2[0], circle2[1])
    circle3Parametrized = circleParametrization(circle3[0], circle3[1])
    circle4Parametrized = circleParametrization(circle4[0], circle4[1])

    X = f(circle1Parametrized, circle3, circle4)
    Y = f(circle2Parametrized, circle3, circle4)
    Z = f(circle3Parametrized, circle1, circle2)
    W = f(circle4Parametrized, circle1, circle2)
    S = f(f(circle1Parametrized, circle3, circle4), circle1, circle2)
    T = f(f(circle2Parametrized, circle3, circle4), circle1, circle2)
    U = f(f(circle3Parametrized, circle1, circle2),circle4, circle3)
    V = f(f(circle4Parametrized, circle1, circle2),circle4, circle3)
    R = f(f(f(circle1Parametrized, circle3, circle4), circle1, circle2),circle4, circl
    P = f(f(f(circle2Parametrized, circle3, circle4), circle1, circle2),circle4, circl

    plt.axvline(x=0, color="k")
    plt.axhline(y=0, color="k")
    plt.axis('equal')


    plt.plot(circle1Parametrized.real, circle1Parametrized.imag)
    plt.plot(circle2Parametrized.real, circle2Parametrized.imag)
    plt.plot(circle3Parametrized.real, circle3Parametrized.imag)
    plt.plot(circle4Parametrized.real, circle4Parametrized.imag)
    plt.plot(X.real, X.imag)
    plt.plot(Y.real, Y.imag)
    plt.plot(Z.real, Z.imag)
    plt.plot(W.real, W.imag)
    plt.plot(S.real, S.imag)
    plt.plot(T.real, T.imag)
    plt.plot(U.real, U.imag)
    plt.plot(V.real, V.imag)
    plt.plot(R.real, R.imag)
    plt.plot(P.real, P.imag)
```

Références

[1] M. Artin : *On the Solutions of Analytic Equations*. Inventiones mathematicae 5 (1968), p. 277-291.
http://eudml.org/doc/141922

[2] https://idv.sinica.edu.tw/ftliang/diff_geom/*diff_geometry(II)/complex_projective_space/compelx_proj_1.pdf

[3] https://mphitchman.com/geometry/section3-4.html

[4] https://matmor.unam.mx/~robert/cur/2010-1%20CA/CA9.pdf

[5] https://www.impan.pl/~pmh/teach/algebra/additional/riemann.pdf

[6] https://download.tuxfamily.org/openmathdep/analysis_real/General_Topology-Kelley.pdf

[7] https://eprints.soton.ac.uk/66335/1/Jon_Williams_PhD_Thesis.pdf

[8] https://www.cambridge.org/core/books/indras-pearls/A0DD7623AEF96D973A0B16CAF90903C1

[9] http://entsphere.com/pub/pdf/Ratcliffe%20-%20Foundations%20of%20hyperbolic%20manifolds%20(2e)%20-%20GTM%20149.pdf

[10] https://arxiv.org/ftp/math/papers/0701/0701572.pdf