La cohomologie au service de la déformation

Théo JAMIN

Laboratoire Angevin de Recherche En MAthématiques
Université d'Angers.

February 14, 2022

Table of Contents

1. Motivation : théorie (classique) de la déformation
   - Structures complexes
2. Cohomologie de Dolbeault
3. Cohomologie de Čech
4. Lien entre Čech, Dolbeault et autres cohomologies
5. Variétés quotient et cohomologie des groupes
6. Cohomologie des groupes
7. Cas des nilvariétés

Soit M une variété compacte de dimension paire.

Definition

Une structure presque complexe sur M est un endomorphisme

$$J : TM_{\mathbb{R}} \to TM_{\mathbb{R}} \text{ avec } J^2 = -Id.$$

Structures presque complexes

Soit M une variété compacte de dimension paire.

Definition

Une structure presque complexe sur M est un endomorphisme

$$J : TM_{\mathbb{R}} \to TM_{\mathbb{R}} \text{ avec } J^2 = -Id.$$

De façon équivalente, c'est la donnée d'une décomposition du fibré tangent complexifié $TM_{\mathbb{C}} := TM_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ en sous-fibrés propres relatifs aux valeurs i et $-i$.

$$TM_{\mathbb{C}} = TM_J^{1,0} \oplus TM_J^{0,1} \text{ où } TM_J^{1,0} = \overline{TM_J^{0,1}}$$

Newlander-Niremberg

Une structure presque complexe est dite *intégrable* si elle provient d'une structure complexe (si localement $(M, J) \simeq (\mathbb{C}^n, i)$), c'est à dire, s'il existe des fonctions $z_1, \cdots, z_n$ telles que $Span(\partial z_i) = (TM^{1,0})^\vee$ et $\overline{\partial} z_i = 0$.

Newlander-Niremberg

Une structure presque complexe est dite *intégrable* si elle provient d'une structure complexe (si localement $(M,J) \simeq (\mathbb{C}^n, i)$), c'est à dire, s'il existe des fonctions $z_1, \cdots, z_n$ telles que $Span(\partial z_i) = (TM^{1,0})^\vee$ et $\overline{\partial} z_i = 0$.
En général, le scindage $(TM_\mathbb{C})^\vee = (TM^{1,0})^\vee \oplus (TM^{0,1})^\vee$ donné par J amène la décomposition de $\mathrm{d}f = \partial f + \overline{\partial} f$ (et une fonction f est dite holomorphe si $\overline{\partial} f = 0$).

Newlander-Niremberg

Une structure presque complexe est dite *intégrable* si elle provient d'une structure complexe (si localement $(M,J) \simeq (\mathbb{C}^n, i)$), c'est à dire, s'il existe des fonctions $z_1, \cdots, z_n$ telles que $Span(\partial z_i) = (TM^{1,0})^\vee$ et $\overline{\partial} z_i = 0$.
En général, le scindage $(TM_{\mathbb{C}})^\vee = (TM^{1,0})^\vee \oplus (TM^{0,1})^\vee$ donné par J amène la décomposition de $\mathrm{d}f = \partial f + \overline{\partial} f$ (et une fonction f est dite holomorphe si $\overline{\partial} f = 0$).

Theorem (Newlander-Niremberg)

La structure presque complexe est intégrable si, et seulement si $\overline{\partial}^2 = 0$.

Problématique

Problème "global"

Soit M une variété réelle compacte de dimension paire. Peut-on trouver toutes les structures complexes sur M ?

Problématique

Problème "global"

Soit M une variété réelle compacte de dimension paire. Peut-on trouver toutes les structures complexes sur M ?

Ce problème est très difficile en général et il n'existe pas de théorie générale pour y répondre de manière satisfaisante. On peut quand même citer le cas des espaces de Teichmüller donné par la variété de représentation d'un groupe de surface (cf plus loin, en fonction du temps).

Problématique

Problème "global"

Soit M une variété réelle compacte de dimension paire. Peut-on trouver toutes les structures complexes sur M ?

Ce problème est très difficile en général et il n'existe pas de théorie générale pour y répondre de manière satisfaisante. On peut quand même citer le cas des espaces de Teichmüller donné par la variété de représentation d'un groupe de surface (cf plus loin, en fonction du temps).

Problème "local"

Soit M une variété complexe compacte. Peut-on trouver toutes les déformation de structures complexes sur M ? C'est à dire les structures complexes proches de la structure complexe naturelle sur M.

Plan

On s'intéresse maintenant au calcul local des déformations et la suite de ces "cours" vise à énoncer les différents outils que nous avons pour ce calcul.

Plan

On s'intéresse maintenant au calcul local des déformations et la suite de ces "cours" vise à énoncer les différents outils que nous avons pour ce calcul.Voici un plan de la suite :

- Nous verrons deux façons de définir des structures complexes :

Plan

On s'intéresse maintenant au calcul local des déformations et la suite de ces "cours" vise à énoncer les différents outils que nous avons pour ce calcul.Voici un plan de la suite :

- Nous verrons deux façons de définir des structures complexes :
  - Les $(0,1)$-formes à valeurs dans le fibré tangent holomorphe à la variété que l'on souhaite déformer. Ce qui nous amènera à définir la **cohomologie de Dolbeault**, analogue complexe de la cohomologie de De Rham.

Plan

On s'intéresse maintenant au calcul local des déformations et la suite de ces "cours" vise à énoncer les différents outils que nous avons pour ce calcul.Voici un plan de la suite :

- Nous verrons deux façons de définir des structures complexes :
  - Les $(0,1)$-formes à valeurs dans le fibré tangent holomorphe à la variété que l'on souhaite déformer. Ce qui nous amènera à définir la **cohomologie de Dolbeault**, analogue complexe de la cohomologie de De Rham.
  - La notion de familles qui nous permettra d'introduire la notion de déformations infinitésimales. Ce qui nous amènera à définir la **cohomologie de Čech**.

Plan

On s'intéresse maintenant au calcul local des déformations et la suite de ces "cours" vise à énoncer les différents outils que nous avons pour ce calcul.Voici un plan de la suite :

- Nous verrons deux façons de définir des structures complexes :
  - Les $(0,1)$-formes à valeurs dans le fibré tangent holomorphe à la variété que l'on souhaite déformer. Ce qui nous amènera à définir la **cohomologie de Dolbeault**, analogue complexe de la cohomologie de De Rham.
  - La notion de familles qui nous permettra d'introduire la notion de déformations infinitésimales. Ce qui nous amènera à définir la **cohomologie de Čech**.
- Nous traiterons ensuite le cas particulier des nilvariétés et nous verrons qu'il est possible de se placer dans un cadre de DGLAs en définissant la **cohomologie de Dolbeault des algèbres de lie**.

Plan

On s'intéresse maintenant au calcul local des déformations et la suite de ces "cours" vise à énoncer les différents outils que nous avons pour ce calcul.Voici un plan de la suite :

- Nous verrons deux façons de définir des structures complexes :
  - Les $(0,1)$-formes à valeurs dans le fibré tangent holomorphe à la variété que l'on souhaite déformer. Ce qui nous amènera à définir la **cohomologie de Dolbeault**, analogue complexe de la cohomologie de De Rham.
  - La notion de familles qui nous permettra d'introduire la notion de déformations infinitésimales. Ce qui nous amènera à définir la **cohomologie de Čech**.
- Nous traiterons ensuite le cas particulier des nilvariétés et nous verrons qu'il est possible de se placer dans un cadre de DGLAs en définissant la **cohomologie de Dolbeault des algèbres de lie**.
- Enfin, nous verrons dans un autre contexte particulier qu'il est possible de relier la cohomologie d'une variété à la cohomologie de son groupe fondamental : la **cohomologie des groupes**.

Table of Contents

1. Motivation : théorie (classique) de la déformation
2. Cohomologie de Dolbeault
   - Structures complexes et $(0,1)$-formes harmoniques
   - Cohomologie de Dolbeault
3. Cohomologie de Čech
4. Lien entre Čech, Dolbeault et autres cohomologies
5. Variétés quotient et cohomologie des groupes
6. Cohomologie des groupes
7. Cas des nilvariétés

Structures complexes

Soit M une variété complexe compacte.
On note $\pi_{0,1}$ (*resp.* $\pi_{1,0}$) la projection de $TM_{\mathbb{C}}$ sur $TM_J^{0,1}$ (*resp.* $TM_J^{1,0}$).

Structures complexes

Soit M une variété complexe compacte.
On note $\pi_{0,1}$ (*resp.* $\pi_{1,0}$) la projection de $TM_{\mathbb{C}}$ sur $TM_J^{0,1}$ (*resp.* $TM_J^{1,0}$).
Si J' est une structure complexe suffisament proche de J alors $\pi_{0,1}$ réalise un isomorphisme entre $TM_{J'}^{0,1}$ et $TM_J^{0,1}$.

Structures complexes

Soit M une variété complexe compacte.
On note $\pi_{0,1}$ (*resp.* $\pi_{1,0}$) la projection de $TM_{\mathbb{C}}$ sur $TM_J^{0,1}$ (*resp.* $TM_J^{1,0}$).
Si J' est une structure complexe suffisament proche de J alors $\pi_{0,1}$ réalise un isomorphisme entre $TM_{J'}^{0,1}$ et $TM_J^{0,1}$.
On obtient alors l'application

$$TM_J^{0,1} \xrightarrow{\pi_{0,1}^{-1}} TM_{J'}^{0,1} \xrightarrow{\pi_{1,0}} TM_J^{1,0}$$

qui est une $(0,1)$-forme à valeur dans $TM^{1,0}$. Inversement, la donnée d'une $(0,1)$-forme à valeur dans $TM^{1,0}$ permet de reconstituer la décomposition de $TM_{\mathbb{C}}$ et donc reconstituer la structure **presque** complexe associée.

Intuition

L'idée de cette première partie était donc de voir une structure presque complexe comme une $(0,1)$-forme ξ à valeur dans $TM^{1,0}$ (a condition d'intégrabilité de la structure presque complexe se traduit sur ξ par l'annulation du Laplacien complexe).

Intuition

L'idée de cette première partie était donc de voir une structure presque complexe comme une $(0,1)$-forme ξ à valeur dans $TM^{1,0}$ (a condition d'intégrabilité de la structure presque complexe se traduit sur ξ par l'annulation du Laplacien complexe).

Ce qui nous amène naturellement à l'étude de $\mathscr{A}^{p,q}(E)$ l'espace des (p,q)-formes sur M à valeurs dans $E = TM^{1,0}$.

Références

Pour ceux qui sont intéréssés par les détails de ce qui va suivre :
- Morrow Kodaira - Complex manifolds.

Références

Pour ceux qui sont intéréssés par les détails de ce qui va suivre :
- Morrow Kodaira - Complex manifolds.

Pour avoir une vue globale :
- Catanese - a superficiel working guide to deformations and moduli.

Cohomologie de Dolbeault

Soit M une variété complexe compacte et E un fibré holomorphe sur M. Comme d'habitude, $\Gamma(U, E)$ est l'espace des sections holomorphes avec U un ouvert de M.

Cohomologie de Dolbeault

Soit M une variété complexe compacte et E un fibré holomorphe sur M. Comme d'habitude, $\Gamma(U, E)$ est l'espace des sections holomorphes avec U un ouvert de M.
L'opérateur $\overline{\partial}$ sur M s'étend naturellement à $\mathscr{A}^{p,q}(E)$ via

$$\overline{\partial}\left(\sum_i \phi_i e_i\right) = \sum_i \left(\overline{\partial}\phi_i\right) e_i$$

Cohomologie de Dolbeault

Soit M une variété complexe compacte et E un fibré holomorphe sur M. Comme d'habitude, $\Gamma(U,E)$ est l'espace des sections holomorphes avec U un ouvert de M.
L'opérateur $\overline{\partial}$ sur M s'étend naturellement à $\mathscr{A}^{p,q}(E)$ via

$$\overline{\partial}\left(\sum_i \phi_i e_i\right) = \sum_i \left(\overline{\partial}\phi_i\right) e_i$$

Definition

On appelle cohomologie de Dolbeault de E la cohomologie du complexe

$$0 \to \Gamma(U,\mathscr{A}^{p,0}(E)) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Gamma(U,\mathscr{A}^{p,1}(E)) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots$$

Et on note $H^{p,*}_{\overline{\partial}}(U,E)$ les groupes de cohomologie.

Cohomologie de Dolbeault

Soit M une variété complexe compacte et E un fibré holomorphe sur M.
Comme d'habitude, $\Gamma(U,E)$ est l'espace des sections holomorphes avec U un ouvert de M.
L'opérateur $\overline{\partial}$ sur M s'étend naturellement à $\mathscr{A}^{p,q}(E)$ via

$$\overline{\partial}\left(\sum_i \phi_i e_i\right) = \sum_i \left(\overline{\partial}\phi_i\right) e_i$$

Definition

On appelle cohomologie de Dolbeault de E la cohomologie du complexe

$$0 \to \Gamma(U,\mathscr{A}^{p,0}(E)) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Gamma(U,\mathscr{A}^{p,1}(E)) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots$$

Et on note $H^{p,*}_{\overline{\partial}}(U,E)$ les groupes de cohomologie.

Évidement, $\overline{\partial}^2 = 0$.

Propriétés

Proposition

Un morphisme holomorphe entre fibrés holomorphes $f : E \to F$ induit un morphisme $\overline{f} : H^{p,*}_{\overline{\partial}}(U,E) \to H^{p,*}_{\overline{\partial}}(U,F)$

Proposition

Le produit extérieur

$$\begin{aligned} \wedge : \Gamma(U, \mathscr{A}^{p,q}(E)) \otimes \Gamma(U, \mathscr{A}^{r,s}(E)) &\longrightarrow \Gamma(U, \mathscr{A}^{p+r,q+s}(E \otimes F)) \\ \sum_i \phi_i e_i \otimes \sum_j \psi_j f_j &\longrightarrow \sum_{i,j} \phi_i \wedge \psi_j \; e_i \otimes f_j \end{aligned}$$

commute avec la différentielle de Dolbeault et induit un cup produit en cohomologie.

Propiétés

Soit M une variété complexe compacte de dimension n et E un fibré holomorphe sur M.

Soit M une variété complexe compacte de dimension n et E un fibré holomorphe sur M.

Théorème

On note $h^q(E)$ *la dimension de* $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M,E)$. *Alors*

- *Pour tout* $p,q \geq 0$, $h^q(E) < \infty$

Propiétés

Soit M une variété complexe compacte de dimension n et E un fibré holomorphe sur M.

Théorème

On note $h^q(E)$ la dimension de $H^{p,q}_{\bar\partial}(M,E)$. Alors

- *Pour tout $p,q \geq 0$, $h^q(E) < \infty$*
- *On a la dualité de Serre :*

$$\Gamma(M,\mathscr{A}^{p,q}(E)) \times \Gamma(M,\mathscr{A}^{n-p,n-q}(E^\vee)) \to \mathbb{C}$$
$$(\phi,\psi) \mapsto \int_M \phi \wedge \psi$$

induit un isomorphisme

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(M,E)^\vee \simeq H^{n-p,n-q}_{\bar\partial}(M,E^\vee)$$

Table of Contents

1. Motivation : théorie (classique) de la déformation
2. Cohomologie de Dolbeault
3. Cohomologie de Čech
   - Déformations infinitésimales et familles
   - Retour aux déformations
   - Application de Kodaira-Spencer
4. Lien entre Čech, Dolbeault et autres cohomologies
5. Variétés quotient et cohomologie des groupes
6. Cohomologie des groupes
7. Cas des nilvariétés

Famille de déformation

Soit M une variété complexe.

Definition

Une déformation de (la structure complexe de) M c'est la donnée d'une submersion holomorphe propre π entre deux variétés complexes $\mathscr{M}$ et (B, b) dont l'image réciproque de b est biholomorphe à M.

Famille de déformation

Soit M une variété complexe.

Definition

Une déformation de (la structure complexe de) M c'est la donnée d'une submersion holomorphe propre π entre deux variétés complexes $\mathscr{M}$ et (B, b) dont l'image réciproque de b est biholomorphe à M.

Les conditions de la définition permettent de retrouver la définition de déformation de structures complexes que l'on a vu dans le paragraphe précédent :

Famille de déformation

Soit M une variété complexe.

Definition

Une déformation de (la structure complexe de) M c'est la donnée d'une submersion holomorphe propre π entre deux variétés complexes $\mathscr{M}$ et (B, b) dont l'image réciproque de b est biholomorphe à M.

Les conditions de la définition permettent de retrouver la définition de déformation de structures complexes que l'on a vu dans le paragraphe précédent :

- Si π est une submersion, le théorème de submersion affirme que l'image réciproque d'un point est une variété.
  Si de plus π est holomorphe, la variété est complexe.

Famille de déformation

Soit M une variété complexe.

Definition

Une déformation de (la structure complexe de) M c'est la donnée d'une submersion holomorphe propre π entre deux variétés complexes $\mathscr{M}$ et (B, b) dont l'image réciproque de b est biholomorphe à M.

Les conditions de la définition permettent de retrouver la définition de déformation de structures complexes que l'on a vu dans le paragraphe précédent :

- Si π est une submersion, le théorème de submersion affirme que l'image réciproque d'un point est une variété.
  Si de plus π est holomorphe, la variété est complexe.
- Si π est propre, l'image réciproque d'un point est un compact.

Lemme d'Ehresmann

Il ne manque qu'une seule chose : comment être sûr que les variétés $\pi^{-1}(t) =: M_t$ sont difféomorphes à M ?

Lemme d'Ehresmann

Il ne manque qu'une seule chose : comment être sûr que les variétés $\pi^{-1}(t) =: M_t$ sont difféomorphes à M ?

Proposition

Si $\pi : M \to N$ est une submersion propre de classe au moins C^2 entre deux variétés M et N alors π est une fibration localement triviale.

Lemme d'Ehresmann

Il ne manque qu'une seule chose : comment être sûr que les variétés $\pi^{-1}(t) =: M_t$ sont difféomorphes à M ?

Proposition

Si $\pi : M \to N$ est une submersion propre de classe au moins C^2 entre deux variétés M et N alors π est une fibration localement triviale.

Remarque

Il n'existe pas d'analogue pour le cas complexe. C'est à dire que supposer π holomorphe ne permettra pas de conclure que c'est une fibration holomorphe triviale.

Lemme d'Ehresmann

Il ne manque qu'une seule chose : comment être sûr que les variétés $\pi^{-1}(t) =: M_t$ sont difféomorphes à M ?

Proposition

Si $\pi : M \to N$ est une submersion propre de classe au moins C^2 entre deux variétés M et N alors π est une fibration localement triviale.

Remarque

Il n'existe pas d'analogue pour le cas complexe. C'est à dire que supposer π holomorphe ne permettra pas de conclure que c'est une fibration holomorphe triviale.

On retrouve donc le bon cadre avec cette définition de déformation puisque l'on sait qu'une submersion holomorphe propre $\pi : \mathscr{M} \to (B, b)$ permettra de construire des structures complexes sur M potentiellement différentes de la structure initiale/naturelle.

Déformations infinitésimales

On va s'intéresser au point de vue local d'une déformation et faire "apparaître" la cohomologie de Čech.

Déformations infinitésimales

On va s'intéresser au point de vue local d'une déformation et faire "apparaître" la cohomologie de Čech.Soit M une variété complexe compacte et $\pi : \mathscr{M} \to (B, b)$ une déformation.

Déformations infinitésimales

On va s'intéresser au point de vue local d'une déformation et faire "apparaître" la cohomologie de Čech.Soit M une variété complexe compacte et $\pi : \mathscr{M} \to (B,b)$ une déformation.Pour simplifier les notations et les calculs, on va supposer que $(B,b) = (\mathbb{C},0)$.

Déformations infinitésimales

On va s'intéresser au point de vue local d'une déformation et faire "apparaître" la cohomologie de Čech.Soit M une variété complexe compacte et $\pi : \mathcal{M} \to (B, b)$ une déformation.Pour simplifier les notations et les calculs, on va supposer que $(B, b) = (\mathbb{C}, 0)$. Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit

(cf Ehresmann) de sorte qu'il existe un recouvrement $\mathcal{U}_j$ de $\pi^{-1}(B_\epsilon)$.

Déformations infinitésimales

On va s'intéresser au point de vue local d'une déformation et faire "apparaître" la cohomologie de Čech.Soit M une variété complexe compacte et $\pi : \mathcal{M} \to (B,b)$ une déformation.Pour simplifier les notations et les calculs, on va supposer que $(B,b) = (\mathbb{C},0)$. Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit

(cf Ehresmann) de sorte qu'il existe un recouvrement $\mathscr{U}_j$ de $\pi^{-1}(B_\epsilon)$.Sur chaque $\mathscr{U}_j$ on a le système de coordonnées

$$p \mapsto \left(z_j^1(p), \cdots, z_j^n(p), t(p)\right)$$

avec $\pi(p) = t(p)$

Avec ces considérations locales, lorsque l'on fixe $t = t(p)$, on récupère les cartes locales complexes de $M_t = \pi^{-1}(t)$ mais ce n'est pas suffisant il nous faut la condition d'intégrabilité (changements de carte holomorphes).

Déformations infinitésimales

Avec ces considérations locales, lorsque l'on fixe $t = t(p)$, on récupère les cartes locales complexes de $M_t = \pi^{-1}(t)$ mais ce n'est pas suffisant il nous faut la condition d'intégrabilité (changements de carte holomorphes).
On sait que $\mathscr{M}$ est une variété complexe, la restruction au recouvrement $\mathscr{U}_j$ possède donc des changements de carte holomorphes :

$$z_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(\underline{z_k}, t(p)), \text{ sur } \mathscr{U}_j \cap \mathscr{U}_k$$

Déformations infinitésimales

Avec ces considérations locales, lorsque l'on fixe $t = t(p)$, on récupère les cartes locales complexes de $M_t = \pi^{-1}(t)$ mais ce n'est pas suffisant il nous faut la condition d'intégrabilité (changements de carte holomorphes).
On sait que $\mathscr{M}$ est une variété complexe, la restruction au recouvrement $\mathscr{U}_j$ possède donc des changements de carte holomorphes :

$$z_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(\underline{z_k}, t(p)), \text{ sur } \mathscr{U}_j \cap \mathscr{U}_k$$

On pose $U_{tj} := \mathscr{U}_j \cap M_t$ et son système de coordonnées

$$\{(z_j^1, \cdots, z_j^n, t) \,||z_j^\alpha| < \epsilon_j\}$$

Avec ces considérations locales, lorsque l'on fixe $t = t(p)$, on récupère les cartes locales complexes de $M_t = \pi^{-1}(t)$ mais ce n'est pas suffisant il nous faut la condition d'intégrabilité (changements de carte holomorphes).
On sait que $\mathscr{M}$ est une variété complexe, la restruction au recouvrement $\mathscr{U}_j$ possède donc des changements de carte holomorphes :

$$z_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(\underline{z_k}, t(p)), \text{ sur } \mathscr{U}_j \cap \mathscr{U}_k$$

On pose $U_{tj} := \mathscr{U}_j \cap M_t$ et son système de coordonnées

$$\{(z_j^1, \cdots, z_j^n, t) \,|\, |z_j^\alpha| < \epsilon_j\}$$

Si $p \in U_{ti} \cap U_{tj} \cap U_{tk}$ alors $p = (z_i, t) = (z_j, t) = (z_k, t)$ et
$z_i^\alpha = f_{ik}^\alpha(z_k, t) = f_{ij}^\alpha(z_j, t) = f_{ij}^\alpha(f_{jk}(z_k)$, où $f_{jk} = (f_{jk}^1, \cdots, f_{jk}^n)$.

Déformations infinitésimales

On veut comprendre comment les changements de cartes changent lorque t varie, on pose donc

$$\theta_{jk}(p,t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(z_k,t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}$$

Déformations infinitésimales

On veut comprendre comment les changements de cartes changent lorque t varie, on pose donc

$$\theta_{jk}(p,t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(z_k,t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}$$

On obtient donc que $\theta_{jk}(-,t)$ est une section de $U_{tj} \cap U_{tk}$ à valeur dans Θ_t le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur M_t.

Déformations infinitésimales

On veut comprendre comment les changements de cartes changent lorque t varie, on pose donc

$$\theta_{jk}(p,t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{jk}^{\alpha}(z_k,t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}$$

On obtient donc que $\theta_{jk}(-,t)$ est une section de $U_{tj} \cap U_{tk}$ à valeur dans Θ_t le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur M_t.

Remarque

$\theta_{ik}(t) = \theta_{ij}(t) + \theta_{jk}(t),$ *sur* $U_{ti} \cap U_{tj} \cap U_{tk}$

On définit $dM_t/dt = \{\theta_{ij}(t)\}_{i,j}$.

Complexe

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur une variété complexe M et $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement (localement fini) de M.

Complexe

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur une variété complexe M et $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un recouvrement (localement fini) de M.On définit $C^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ par

$$C^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \bigoplus_{i_0<\cdots<i_p} \mathscr{F}(U_{i_0}\cap\cdots U_{i_p})$$

Et la différentielle $\mathrm{d}: C^{p-1}(\mathscr{U},\mathscr{F}) \to C^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ donné par

$$\mathrm{d}\,\alpha(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k}) = \sum_j (-1)^j \alpha(U_{i_0}\cap\cdots\widehat{U_{i_j}}\cap\cdots\cap U_{i_k})$$

Complexe

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau sur une variété complexe M et $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement (localement fini) de M.On définit $C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ par

$$C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \bigoplus_{i_0 < \cdots < i_p} \mathscr{F}(U_{i_0} \cap \cdots U_{i_p})$$

Et la différentielle $\mathrm{d} : C^{p-1}(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ donné par

$$\mathrm{d}\,\alpha(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}) = \sum_j (-1)^j \alpha(U_{i_0} \cap \cdots \widehat{U_{i_j}} \cap \cdots \cap U_{i_k})$$

Remarque

La définition s'adapte bien lorsque l'on veut faire de la cohomologie de Čech à valeur dans un fibré holomorphe en considérant les sections locales de celui-ci.

Cohomologie de Čech

On a bien $\mathrm{d}^2 = 0$ et on peut définir

On a bien $\mathrm{d}^2 = 0$ et on peut définir

Definition

La cohomologie de Čech de $\mathscr{U}$ à valeur dans $\mathscr{F}$ est la cohomologie du complexe $(C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F}),\mathrm{d})$.

Et on note $\check{H}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$ les groupes de cohomologie.

Cohomologie de Čech

On a bien $\mathrm{d}^2 = 0$ et on peut définir

Definition

La cohomologie de Čech de $\mathscr{U}$ à valeur dans $\mathscr{F}$ est la cohomologie du complexe $(C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F}),\mathrm{d})$.

Et on note $\check{H}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$ les groupes de cohomologie.

Definition

Soit M une variété complexe et $\mathscr{F}$ un faisceau sur M. La cohomologie de Čech de M à valeur dans $\mathscr{F}$ est définie comme la limite inductive sur les recouvrements $\mathscr{U}$ ouverts de M des groupes $\check{H}^\bullet(M,\mathscr{F})$:

$$\check{H}^\bullet(M,\mathscr{F}) = \varinjlim_{\mathscr{U}} \check{H}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$$

Une remarque importante

Si vous vous souvenez de la description locale, nous avions définit $\theta_{jk}(p,t)$ et $dM_t/dt = \{\theta_{ij}(t)\}_{i,j}$.

Une remarque importante

Si vous vous souvenez de la description locale, nous avions définit $\theta_{jk}(p,t)$ et $dM_t/dt = \{\theta_{ij}(t)\}_{i,j}$.
Avec le travail fait entre temps, nous pouvons affirmer que

$$dM_t/dt \in \check{H}^1(M_t, \Theta_t)$$

Une remarque importante

Si vous vous souvenez de la description locale, nous avions définit $\theta_{jk}(p,t)$ et $dM_t/dt = \{\theta_{ij}(t)\}_{i,j}$.
Avec le travail fait entre temps, nous pouvons affirmer que

$$dM_t/dt \in \check{H}^1(M_t, \Theta_t)$$

Les déformations infinitésimales de M sont donc "contrôlées" par le groupe $\check{H}^1(M, \Theta)$.

Quelques définitions

Avant d'aller plus loin, donnons une définition.

Definition

Une déformation $\pi : \mathscr{M} \to (B, b)$ est dite complète si pour toute autre déformation $\omega : \mathscr{N} \to (A, a)$, il existe un voisinage U de a et une fonction holomorphe f de U dans B avec $f(a) = b$ telle que toutes les fibres de $\omega : \mathscr{N} \to (U, a)$ soit biholomorphes aux fibres de la déformation pullback $f^* : \mathscr{M} \to (U, a)$.

Quelques définitions

Avant d'aller plus loin, donnons une définition.

Definition

Une déformation $\pi : \mathscr{M} \to (B, b)$ est dite complète si pour toute autre déformation $\omega : \mathscr{N} \to (A, a)$, il existe un voisinage U de a et une fonction holomorphe f de U dans B avec $f(a) = b$ telle que toutes les fibres de $\omega : \mathscr{N} \to (U, a)$ soit biholomorphes aux fibres de la déformation pullback $f^* : \mathscr{M} \to (U, a)$.La déformation est dite verselle si la différentielle de f au point base est unique.

Quelques définitions

Avant d'aller plus loin, donnons une définition.

Definition

Une déformation $\pi : \mathscr{M} \to (B, b)$ est dite complète si pour toute autre déformation $\omega : \mathscr{N} \to (A, a)$, il existe un voisinage U de a et une fonction holomorphe f de U dans B avec $f(a) = b$ telle que toutes les fibres de $\omega : \mathscr{N} \to (U, a)$ soit biholomorphes aux fibres de la déformation pullback $f^* : \mathscr{M} \to (U, a)$.La déformation est dite verselle si la différentielle de f au point base est unique.

Étant donné une variété complexe compacte M, on aimerait donc construire une déformation verselle.

Quelques définitions

Avant d'aller plus loin, donnons une définition.

Definition

Une déformation $\pi : \mathscr{M} \to (B,b)$ est dite complète si pour toute autre déformation $\omega : \mathscr{N} \to (A,a)$, il existe un voisinage U de a et une fonction holomorphe f de U dans B avec $f(a) = b$ telle que toutes les fibres de $\omega : \mathscr{N} \to (U,a)$ soit biholomorphes aux fibres de la déformation pullback $f^* : \mathscr{M} \to (U,a)$.La déformation est dite verselle si la différentielle de f au point base est unique.

Étant donné une variété complexe compacte M, on aimerait donc construire une déformation verselle.

Remarque

Le terme versalité n'est pas universel, certain utilisent semi-universalité.

Application de Kodaira-Spencer

On considère l'application

$$\begin{aligned} \rho_b : T_b B &\to \check{H}^1(M_b, \Theta_b) \\ \frac{\partial}{\partial t} &\mapsto \left. \frac{\partial M_t}{\partial t} \right|_{t=b} \end{aligned}$$

Application de Kodaira-Spencer

On considère l'application

$$\begin{aligned} \rho_b : T_b B &\to \check{H}^1(M_b, \Theta_b) \\ \frac{\partial}{\partial t} &\mapsto \left.\frac{\partial M_t}{\partial t}\right|_{t=b} \end{aligned}$$

On a le théorème suivant

Théorème (de complétude, Kodaira-Spencer - 1958)

Si ρ_b est surjective, la déformation $\pi : \mathcal{M} \to (B, b)$ est complete.

Application de Kodaira-Spencer

On considère l'application

$$\begin{aligned} \rho_b : T_b B &\to \check{H}^1(M_b, \Theta_b) \\ \frac{\partial}{\partial t} &\mapsto \left.\frac{\partial M_t}{\partial t}\right|_{t=b} \end{aligned}$$

On a le théorème suivant

Théorème (de complétude, Kodaira-Spencer - 1958)

Si ρ_b est surjective, la déformation $\pi : \mathcal{M} \to (B, b)$ est complete.
Si de plus elle est injective, la déformation est verselle.

Application de Kodaira-Spencer

On considère l'application

$$\rho_b : T_b B \to \check{H}^1(M_b, \Theta_b)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \left.\frac{\partial M_t}{\partial t}\right|_{t=b}$$

On a le théorème suivant

Théorème (de complétude, Kodaira-Spencer - 1958)

Si ρ_b est surjective, la déformation $\pi : \mathcal{M} \to (B, b)$ est complete.
Si de plus elle est injective, la déformation est verselle.

Remarque

Sous certaines hypothèses, par exemple $\check{H}^0(M_b, \Theta_b)) = 0$, la famille n'est plus verselle mais universelle (f est unique).

Table of Contents

1. Motivation : théorie (classique) de la déformation
2. Cohomologie de Dolbeault
3. Cohomologie de Čech
4. Lien entre Čech, Dolbeault et autres cohomologies
   - Čech vs Dolbeault
   - Čech vs cohomologie des faisceaux
5. Variétés quotient et cohomologie des groupes
6. Cohomologie des groupes
7. Cas des nilvariétés

Théorème de Dolbeault

François avait énoncé le théorème de De Rham qui affirme que les complexes de De Rham et les complexes de cohomologie singulière d'une variété différentielle réelle sont homotopes.

Théorème de Dolbeault

François avait énoncé le théorème de De Rham qui affirme que les complexes de De Rham et les complexes de cohomologie singulière d'une variété différentielle réelle sont homotopes.
Le théorème de Dolbeault en est son analogue complexe :

Théorème (Dolbeault)

Soit M une variété complexe compacte de dimension n et E un fibré holomorphe sur M, alors

$$H^{p,q}(M,E) \simeq \check{H}^{p}(M,\Omega^{p}(E))$$

où $\Omega^{p}(E)$ est le faisceau des p-formes holomorphes sur M à valeur dans E.

Théorème de Leray

Axel nous a parlé de cohomologie des faisceaux. Sous certaines hypothèses d'acyclicité d'un faisceau $\mathscr{F}$ sur M, la cohomologie de Čech et la cohomologie de Čech coïncident

Théorème de Leray

Axel nous a parlé de cohomologie des faisceaux. Sous certaines hypothèses d'acyclicité d'un faisceau $\mathscr{F}$ sur M, la cohomologie de Čech et la cohomologie de Čech coïncident, plus précisement :

Théorème (Leray)

Soit M une variété différentiable, et $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de M. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau acyclique sur toute intersection finie d'élèments de $\mathscr{U}$ alors

$$\check{H}^p(\mathscr{U},^{\mathscr{F}}) \simeq H^p(M,\mathscr{F})$$

Théorème de Leray

Axel nous a parlé de cohomologie des faisceaux. Sous certaines hypothèses d'acyclicité d'un faisceau $\mathscr{F}$ sur M, la cohomologie de Čech et la cohomologie de Čech coïncident, plus précisement :

Théorème (Leray)

Soit M une variété différentiable, et $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de M. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau acyclique sur toute intersection finie d'élèments de $\mathscr{U}$ alors

$$\check{H}^p(\mathscr{U},{}^{\mathscr{F}}) \simeq H^p(M,\mathscr{F})$$

Remarque

Il existe d'autres liens entre la cohomologie de Čech, la cohomologie singulière etc. Mais le temps ne nous permet pas d'énoncer tout.

Table of Contents

1. Motivation : théorie (classique) de la déformation
2. Cohomologie de Dolbeault
3. Cohomologie de Čech
4. Lien entre Čech, Dolbeault et autres cohomologies
5. Variétés quotient et cohomologie des groupes
6. Cohomologie des groupes
7. Cas des nilvariétés

Cas des quotients

Les cohomologies présentées jusque là sont extrêmement pratique mais pas toujours calculables dans des cas concrets. Il est donc important d'avoir d'autre outils pour réussir des calculs explicites.

Cas des quotients

Les cohomologies présentées jusque là sont extrêmement pratique mais pas toujours calculables dans des cas concrets. Il est donc important d'avoir d'autre outils pour réussir des calculs explicites.
Un cas particulier de variété particulièrement riche est celui des quotients. Typiquement, le quotient d'un groupe de Lie complexe par un sous-groupe discret cocompact et agissant librement de façon totalement discontinue fournis une variété compacte naturellement munie d'une structure complexe.

Mumford - Abelian varieties

Soit X un "bon" espace topologique (peu importe pour la suite, nous prendrons des groupes de Lie complexes) et G un groupe agissant sur X librement et de façon totalement discontinue.

Mumford - Abelian varieties

Soit X un "bon" espace topologique (peu importe pour la suite, nous prendrons des groupes de Lie complexes) et G un groupe agissant sur X librement et de façon totalement discontinue.
On considère $Y = X/G$ le quotient et $\pi : X \to Y$ la projection.

Mumford - Abelian varieties

Soit X un "bon" espace topologique (peu importe pour la suite, nous prendrons des groupes de Lie complexes) et G un groupe agissant sur X librement et de façon totalement discontinue.
On considère $Y = X/G$ le quotient et $\pi : X \to Y$ la projection.
On veut arriver au résultat suivant issu de [Mum08] :

Soit X un "bon" espace topologique (peu importe pour la suite, nous prendrons des groupes de Lie complexes) et G un groupe agissant sur X librement et de façon totalement discontinue.
On considère $Y = X/G$ le quotient et $\pi : X \to Y$ la projection.
On veut arriver au résultat suivant issu de [Mum08] :

Théorème

Pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur Y, on a une application naturelle

$$\phi^p_{\mathscr{F}} : H^p(G, \Gamma(X, \pi^* \mathscr{F})) \to \check{H}^p(Y, \mathscr{F})$$

Mumford - Abelian varieties

Soit X un "bon" espace topologique (peu importe pour la suite, nous prendrons des groupes de Lie complexes) et G un groupe agissant sur X librement et de façon totalement discontinue.
On considère $Y = X/G$ le quotient et $\pi : X \to Y$ la projection.
On veut arriver au résultat suivant issu de [Mum08] :

Théorème

Pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur Y, on a une application naturelle

$$\phi^p_{\mathscr{F}} : H^p(G, \Gamma(X, \pi^* \mathscr{F})) \to \check{H}^p(Y, \mathscr{F})$$

qui est un isomorphisme si $H^i(X, \pi^* \mathscr{F}) = 0$, $i \geq 1$

Mumford - Abelian varieties

Soit X un "bon" espace topologique (peu importe pour la suite, nous prendrons des groupes de Lie complexes) et G un groupe agissant sur X librement et de façon totalement discontinue.
On considère $Y = X/G$ le quotient et $\pi : X \to Y$ la projection.
On veut arriver au résultat suivant issu de [Mum08] :

Théorème

Pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur Y, on a une application naturelle

$$\phi^p_{\mathscr{F}} : H^p(G, \Gamma(X, \pi^*\mathscr{F})) \to \check{H}^p(Y, \mathscr{F})$$

qui est un isomorphisme si $H^i(X, \pi^*\mathscr{F}) = 0,\ i \geq 1$

où les groupes $H^p(G, \Gamma(X, \pi^*\mathscr{F}))$ sont les groupes de cohomologie de G que l'on explicitera juste après.

Table of Contents

1 Motivation : théorie (classique) de la déformation

2 Cohomologie de Dolbeault

3 Cohomologie de Čech

4 Lien entre Čech, Dolbeault et autres cohomologies

5 Variétés quotient et cohomologie des groupes

6 Cohomologie des groupes
- Définitions
- Construction de l'application de Mumford
- Retour sur l'application de Kodaira-Spencer

7 Cas des nilvariétés

Complexe

Soit G un groupe et M un G-module.

Definition

La cohomologie de G à valeur dans M est la cohomologie du complexe $(C^\bullet(G,M), d_\bullet)$ où

- $C^p(G,M) = \{f$ fonction de G^p dans $M\}$,
- $d_p : C^p(G,M) \to C^{p+1}(G,M)$ définie par

$$d_p f(g_0,\cdots,g_p) = g_0.f(g_1,\cdots,g_p) + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+1} f(g_0,\cdots,g_i.g_{i+1},\cdots,g_p) + (-1)^{p-1} f(g_0,\cdots,g_{p-1})$$

Bas degrés

On ne s'intéressera qu'au bas degrés de ce complexe ($C^p(G,M)$, $p = 0, 1$ ou 2).

Bas degrés

On ne s'intéressera qu'au bas degrés de ce complexe ($C^p(G,M)$, $p = 0, 1$ ou 2).Quelques remarques :

- $C^0(G,M) = M$ et $d_0(m)(g) = g.m - m$,

Bas degrés

On ne s'intéressera qu'au bas degrés de ce complexe ($C^p(G,M)$, $p=0,1$ ou 2).Quelques remarques :

- $C^0(G,M) = M$ et $d_0(m)(g) = g.m - m$,
- $Z^1(G,M) = \{f : G \to M \mid f(gh) = f(g) + g.f(h)$ (ce qu'on appelle les morphismes croisés),

Bas degrés

On ne s'intéressera qu'au bas degrés de ce complexe ($C^p(G,M)$, $p=0,1$ ou 2).Quelques remarques :

- $C^0(G,M)=M$ et $d_0(m)(g)=g.m-m$,
- $Z^1(G,M)=\{f:G\to M \mid f(gh)=f(g)+g.f(h)$ (ce qu'on appelle les morphismes croisés),
- Si M est un G-module trivial,
  $B^1(G,M)=0,\ Z^1(G,M)=H^1(G,M)=Hom(G,M)$,
- Etant donné un produit G-linéaire $*:M\times N\to P$ de G-modules, on a un cup produit

$$\begin{aligned} H^p(G,M)\times H^q(G,N) &\to H^{p+q}(G,P)\\ (f,h) &\mapsto f\cup h \end{aligned}$$

où

$$f\cup h(g_0,\cdots,g_{p+q})=f(g_0,\cdots,g_p)*(g_0\cdots g_p).h(g_{p+1},\cdots,g_{p+q})$$

Construction de l'application $\phi_{\mathscr{F}}$

Soit V_i un recouvrement ouvert de X/G tel que

- $\pi^{-1}(V_i) = \bigcup_{g \in G} g.U_i$ avec $U_i \subset X$ tel que $\pi : U_i \to V_i$ soit un difféomorphisme.

Construction de l'application $\phi_{\mathscr{F}}$

Soit V_i un recouvrement ouvert de X/G tel que

- $\pi^{-1}(V_i) = \bigcup_{g \in G} g.U_i$ avec $U_i \subset X$ tel que $\pi : U_i \to V_i$ soit un difféomorphisme.
- Pour tout i, j il existe au plus un $g \in G$ tel que $U_i \cap g.U_j \neq \emptyset$, que l'on notera g_{ij} s'il existe.

Construction de l'application $\phi_{\mathscr{F}}$

Soit V_i un recouvrement ouvert de X/G tel que

- $\pi^{-1}(V_i) = \bigcup_{g \in G} g.U_i$ avec $U_i \subset X$ tel que $\pi : U_i \to V_i$ soit un difféomorphisme.
- Pour tout i, j il existe au plus un $g \in G$ tel que $U_i \cap g.U_j \neq \emptyset$, que l'on notera g_{ij} s'il existe.

On définit alors une application

$$\begin{aligned} \phi^p_{\mathscr{F}} : C^p(G, \Gamma(X, \pi^* \mathscr{F})) &\to C^p(Y, \mathscr{F}) \\ f &\mapsto (\phi(f))_{i_0, \cdots, i_p} \end{aligned}$$

Construction de l'application $\phi_{\mathscr{F}}$

Soit V_i un recouvrement ouvert de X/G tel que

- $\pi^{-1}(V_i) = \bigcup_{g \in G} g.U_i$ avec $U_i \subset X$ tel que $\pi : U_i \to V_i$ soit un difféomorphisme.
- Pour tout i, j il existe au plus un $g \in G$ tel que $U_i \cap g.U_j \neq \emptyset$, que l'on notera g_{ij} s'il existe.

On définit alors une application

$$\begin{aligned} \phi^p_{\mathscr{F}} : C^p(G, \Gamma(X, \pi^* \mathscr{F})) &\to C^p(Y, \mathscr{F}) \\ f &\mapsto (\phi(f))_{i_0, \cdots, i_p} \end{aligned}$$

où $(\phi^p_{\mathscr{F}}(f))_{i_0, \cdots, i_p} = res \circ (\pi^*)^{-1}[f(g_{i_0, i_1}, \cdots, g_{i_{p-1}, i_p})]$ avec

$$\Gamma(X, \pi^* \mathscr{F}) \xrightarrow{res} \Gamma(U_i, \pi^* \mathscr{F}) \xleftarrow{\pi^*} \Gamma(V_i, \mathscr{F})$$

Propriétés supplémentaires

On vérifie alors "aisément" que la différentielle commute au $\phi^p_{\mathscr{F}}$.

Propriétés supplémentaires

On vérifie alors "aisément" que la différentielle commute au $\phi^p_{\mathscr{F}}$.On peut aussi montrer plusieurs propriétés de ces applications :

Proposition

- *Comme énoncé plus tôt, si* $H^i(X, \pi^* \mathscr{F}) = 0$ *pour* $i \geq 1$*, alors* $\phi^p_{\mathscr{F}}$ *sont des isomorphismes,* On vérifie alors "aisément" que la différentielle commute au $\phi^p_{\mathscr{F}}$.On peut aussi montrer plusieurs propriétés de ces applications :

Proposition

- *Comme énoncé plus tôt, si* $H^i(X,\pi^*\mathscr{F}) = 0$ *pour* $i \geq 1$, *alors* $\phi^p_{\mathscr{F}}$ *sont des isomorphismes,*
- *Les applications* $\phi^p_{\mathscr{F}}$ *sont compatibles avec le cup produit,*

On vérifie alors "aisément" que la différentielle commute au $\phi^p_{\mathscr{F}}$.On peut aussi montrer plusieurs propriétés de ces applications :

Proposition

- *Comme énoncé plus tôt, si* $H^i(X,\pi^*\mathscr{F}) = 0$ *pour* $i \geq 1$*, alors* $\phi^p_{\mathscr{F}}$ *sont des isomorphismes,*
- *Les applications* $\phi^p_{\mathscr{F}}$ *sont compatibles avec le cup produit,*
- *Si*
$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F}'' \to 0$$
et
$$0 \to \Gamma(X,\pi^*\mathscr{F}) \to \Gamma(X,\pi^*\mathscr{F}') \to \Gamma(X,\pi^*\mathscr{F}'') \to 0$$
sont exactes, alors on obtient un morphisme entre les suites exactes longues associées en cohomologie $H^p(G,\bullet)$ *et* $\check{H}^p(Y,\bullet)$.

Cas particulier de ce résultat

On rappelle le théorème B de Cartan :

Théorème

Si X *est une variété Stein (pensez sous variété de* $\mathbb{C}^n$*) alors pour tout faisceau cohérent* $\mathscr{F}$*,* $H^i(X, \mathscr{F}) = 0\ i \geq 1$*.*

Cas particulier de ce résultat

On rappelle le théorème B de Cartan :

Théorème

Si X est une variété Stein (pensez sous variété de $\mathbb{C}^n$) alors pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$, $H^i(X, \mathscr{F}) = 0\, i \geq 1$.

Par exemple, pour G un sous groupe de Lie Stein complexe et $\Gamma \subset G$ de sorte que le quotient soit une variété complexe, en assemblant ces résultats on a :

Cas particulier de ce résultat

On rappelle le théorème B de Cartan :

Théorème

Si X est une variété Stein (pensez sous variété de $\mathbb{C}^n$) alors pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$, $H^i(X, \mathscr{F}) = 0\, i \geq 1$.

Par exemple, pour G un sous groupe de Lie Stein complexe et $\Gamma \subset G$ de sorte que le quotient soit une variété complexe, en assemblant ces résultats on a :

- Θ le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur le quotient $M = G/\Gamma$ est cohérent,

Cas particulier de ce résultat

On rappelle le théorème B de Cartan :

Théorème

Si X est une variété Stein (pensez sous variété de $\mathbb{C}^n$) alors pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$, $H^i(X,\mathscr{F}) = 0\, i \geq 1$.

Par exemple, pour G un sous groupe de Lie Stein complexe et $\Gamma \subset G$ de sorte que le quotient soit une variété complexe, en assemblant ces résultats on a :

- Θ le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur le quotient $M = G/\Gamma$ est cohérent,
- $\pi^*\Theta$ l'est aussi, où π denote la projection,

Cas particulier de ce résultat

On rappelle le théorème B de Cartan :

Théorème

Si X est une variété Stein (pensez sous variété de $\mathbb{C}^n$) alors pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$, $H^i(X,\mathscr{F}) = 0 \; i \geq 1$.

Par exemple, pour G un sous groupe de Lie Stein complexe et $\Gamma \subset G$ de sorte que le quotient soit une variété complexe, en assemblant ces résultats on a :

- Θ le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur le quotient $M = G/\Gamma$ est cohérent,
- $\pi^*\Theta$ l'est aussi, où π denote la projection,
- G est Stein donc $H^i(G,\pi^*\Theta) = 0$ pour tout $i \geq 1$ par Cartan,

Cas particulier de ce résultat

On rappelle le théorème B de Cartan :

Théorème

Si X est une variété Stein (pensez sous variété de $\mathbb{C}^n$) alors pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$, $H^i(X,\mathscr{F}) = 0\, i \geq 1$.

Par exemple, pour G un sous groupe de Lie Stein complexe et $\Gamma \subset G$ de sorte que le quotient soit une variété complexe, en assemblant ces résultats on a :

- Θ le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur le quotient $M = G/\Gamma$ est cohérent,
- $\pi^*\Theta$ l'est aussi, où π denote la projection,
- G est Stein donc $H^i(G,\pi^*\Theta) = 0$ pour tout $i \geq 1$ par Cartan,

on applique le résultat de Mumford et on obtient

$$H^p(\Gamma,\Gamma(,\pi^*\Theta)) \simeq H^p(G/\Gamma,\Theta)$$

Pour revenir à Kodaira-Spencer

Pour une famille $\pi : X \to B$ d'une variété complexe M, nous avions définit plus tôt l'application de Kodaira-Spencer par un calcul local.

$$KS : T_b B \to H^1(M, \Theta)$$

Pour revenir à Kodaira-Spencer

Pour une famille $\pi : X \to B$ d'une variété complexe M, nous avions définit plus tôt l'application de Kodaira-Spencer par un calcul local.

$$KS : T_b B \to H^1(M, \Theta)$$

Mais il existe une autre façon de définir cette application au moyen de la suite fondamentale :

$$0 \to \Theta \to \Xi \to \Upsilon \to 0$$

Pour revenir à Kodaira-Spencer

Pour une famille $\pi : X \to B$ d'une variété complexe M, nous avions définit plus tôt l'application de Kodaira-Spencer par un calcul local.

$$KS : T_b B \to H^1(M, \Theta)$$

Mais il existe une autre façon de définir cette application au moyen de la suite fondamentale :

$$0 \to \Theta \to \Xi \to \Upsilon \to 0$$

comme étant la première application connectante de la suite exacte longue (après identification des sections de Υ à $T_b B$) :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^0(X|_{\pi^{-1}(b)}, \Upsilon) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & H^1(M, \Theta) \arrow[r] & \cdots \\ & T_b B \arrow[ur, "KS"] & & \end{tikzcd}$$

Kodaira-Spencer et cohomologie des groupes

On peut donc continuer "le passage" vers la cohomologie des groupes et regarder l'application de Kodaira-Spencer dans ce contexte en utilisant l'isomorphisme entre les deux suites exactes longues associées aux suites exactes de faisceaux (lorsqu'elles le sont) :

$$0 \to \Theta \to \Xi \to \Upsilon \to 0$$

Kodaira-Spencer et cohomologie des groupes

On peut donc continuer "le passage" vers la cohomologie des groupes et regarder l'application de Kodaira-Spencer dans ce contexte en utilisant l'isomorphisme entre les deux suites exactes longues associées aux suites exactes de faisceaux (lorsqu'elles le sont) :

$$0 \to \Theta \to \Xi \to \Upsilon \to 0$$

et

$$0 \to \Gamma(X, \pi^*\Theta) \to \Gamma(X, \pi^*\Xi) \to \Gamma(X, \pi^*\Upsilon) \to 0$$

Kodaira-Spencer et cohomologie des groupes

On peut donc continuer "le passage" vers la cohomologie des groupes et regarder l'application de Kodaira-Spencer dans ce contexte en utilisant l'isomorphisme entre les deux suites exactes longues associées aux suites exactes de faisceaux (lorsqu'elles le sont) :

$$0 \to \Theta \to \Xi \to \Upsilon \to 0$$

et

$$0 \to \Gamma(X, \pi^* \Theta) \to \Gamma(X, \pi^* \Xi) \to \Gamma(X, \pi^* \Upsilon) \to 0$$

Ce qui donne un autre outil encore que Čech et Dolbeault pour vérifier la versalité d'une déformation dans le cas particulier d'un quotient complexe compact de revêtement Stein.

Table of Contents

1 Motivation : théorie (classique) de la déformation

2 Cohomologie de Dolbeault

3 Cohomologie de Čech

4 Lien entre Čech, Dolbeault et autres cohomologies

5 Variétés quotient et cohomologie des groupes

6 Cohomologie des groupes

7 Cas des nilvariétés

Nilvariétés et groupes de Lie nilpotents

On va maintenant s'intéresser toujours au cas d'un quotient M d'un groupe de Lie G **nilpotent** (complexe pour simplifier et avoir une structure complexe naturelle) par un sous-groupe discret co-compact Γ (agissant à gauche).

Nilvariétés et groupes de Lie nilpotents

On va maintenant s'intéresser toujours au cas d'un quotient M d'un groupe de Lie G **nilpotent** (complexe pour simplifier et avoir une structure complexe naturelle) par un sous-groupe discret co-compact Γ (agissant à gauche).
On rappelle qu'un groupe de Lie est dit nilpotent si la suite centrale de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dégénère, i.e. :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}] \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^s = \{0\}$$

Nilvariétés et groupes de Lie nilpotents

On va maintenant s'intéresser toujours au cas d'un quotient M d'un groupe de Lie G **nilpotent** (complexe pour simplifier et avoir une structure complexe naturelle) par un sous-groupe discret co-compact Γ (agissant à gauche).
On rappelle qu'un groupe de Lie est dit nilpotent si la suite centrale de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dégénère, i.e. :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}] \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^s = \{0\}$$

La structure complexe J sur M permet dans ce contexte de décomposer l'algèbre de Lie compléxifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ en sous-espaces propres de J :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{0,1} \oplus \mathfrak{g}^{1,0}$$

Nilvariétés et groupes de Lie nilpotents

On va maintenant s'intéresser toujours au cas d'un quotient M d'un groupe de Lie G **nilpotent** (complexe pour simplifier et avoir une structure complexe naturelle) par un sous-groupe discret co-compact Γ (agissant à gauche).
On rappelle qu'un groupe de Lie est dit nilpotent si la suite centrale de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dégénère, i.e. :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}^i,\mathfrak{g}] \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^s = \{0\}$$

La structure complexe J sur M permet dans ce contexte de décomposer l'algèbre de Lie compléxifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ en sous-espaces propres de J :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{0,1} \oplus \mathfrak{g}^{1,0}$$

Et permet de décomposer l'algèbre extérieure de $\mathfrak{g}^*$:

$$\Lambda^k \mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p \mathfrak{g}^{*0,1} \otimes \mathfrak{g}^{*1,0} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} \mathfrak{g}^*$$

$\mathfrak{g}$-modules

Soit E un $\mathfrak{g}$-module (encore une fois, complexe. Il existe une version analogue avec E réel munit d'une structure presque complexe mais cela complique inutilement les choses), i.e. un espace vectoriel munit d'une structure de $\mathfrak{g}$-module

$$\mathfrak{g} \times E \to E(x, v) \mapsto x.v$$

tel que $[x, y].v = x.y.v - y.x.v$.

$\mathfrak{g}$-modules

Soit E un $\mathfrak{g}$-module (encore une fois, complexe. Il existe une version analogue avec E réel munit d'une structure presque complexe mais cela complique inutilement les choses), i.e. un espace vectoriel munit d'une structure de $\mathfrak{g}$-module

$$\mathfrak{g} \times E \to E(x, v) \mapsto x.v$$

tel que $[x, y].v = x.y.v - y.x.v$.
La donnée d'une structure de $\mathfrak{g}$-module sur E induit une représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E)$ telle que la restriction de ρ à $\mathfrak{g}^{0,1}$ induise une représentation dans $E^{1,0}$.

Complexe

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et E un $\mathfrak{g}$-module complexe.

Complexe

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et E un $\mathfrak{g}$-module complexe.Pour construire la cohomologie de Dolbeault des algèbres de Lie, on considère le complexe de Chevalley suivant :

Complexe

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et E un $\mathfrak{g}$-module complexe.Pour construire la cohomologie de Dolbeault des algèbres de Lie, on considère le complexe de Chevalley suivant :

$$0 \to \Lambda^{p,0}\mathfrak{g}^* \otimes E \to \Lambda^{p,1}\mathfrak{g}^* \otimes E \to \cdots \to \Lambda^{p,q}\mathfrak{g}^* \otimes E \to \cdots$$

Complexe

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et E un $\mathfrak{g}$-module complexe.Pour construire la cohomologie de Dolbeault des algèbres de Lie, on considère le complexe de Chevalley suivant :

$$0 \to \Lambda^{p,0}\mathfrak{g}^* \otimes E \to \Lambda^{p,1}\mathfrak{g}^* \otimes E \to \cdots \to \Lambda^{p,q}\mathfrak{g}^* \otimes E \to \cdots$$

Avec la différentielle

$$(d_k\alpha)(x_1, \cdots, x_{k+1}) := \sum_{i=1}^{k} +1(-1)^{i+1} x_i(\alpha(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{k+1})) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \alpha([x_i, x_j], x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, \hat{x}_j, \cdots, x_{k+1})$$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et E un $\mathfrak{g}$-module complexe.Pour construire la cohomologie de Dolbeault des algèbres de Lie, on considère le complexe de Chevalley suivant :

$$0 \to \Lambda^{p,0}\mathfrak{g}^* \otimes E \to \Lambda^{p,1}\mathfrak{g}^* \otimes E \to \cdots \to \Lambda^{p,q}\mathfrak{g}^* \otimes E \to \cdots$$

Avec la différentielle

$$(d_k\alpha)(x_1,\cdots,x_{k+1}) := \sum_{i=1}^{k} +1(-1)^{i+1}x_i(\alpha(x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_{k+1}))+$$

$$+\sum_{1\leq i<j\leq k+1}(-1)^{i+j}\alpha([x_i,x_j],x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_{k+1})$$

On note $H^{p,q}(\mathfrak{g},E)$ les groupes de cohomologie.

Sous-complexe du complex de Dolbeault

Remarque

Le complexe est un sous-complexe du complexe de Dolbeault des (p,q)-formes constitué de celles qui sont invariantes à gauche :

$$i : \left(\Lambda^{p,\bullet}\mathfrak{g}^* \otimes E, d\right) \hookrightarrow \left(\mathscr{A}^{p,\bullet}(E), \overline{\partial}\right)$$

Sous-complexe du complex de Dolbeault

Remarque

Le complexe est un sous-complexe du complexe de Dolbeault des (p,q)-formes constitué de celles qui sont invariantes à gauche :

$$i : \left(\Lambda^{p,\bullet}\mathfrak{g}^* \otimes E, d\right) \hookrightarrow \left(\mathscr{A}^{p,\bullet}(E), \overline{\partial}\right)$$

Theorem

Soit $M = G/\Gamma$ une nilvariété parallelisable complexe compacte.

Sous-complexe du complex de Dolbeault

Remarque

Le complexe est un sous-complexe du complexe de Dolbeault des (p,q)*-formes constitué de celles qui sont invariantes à gauche :*

$$i : \left(\Lambda^{p,\bullet}\mathfrak{g}^* \otimes E, d\right) \hookrightarrow \left(\mathscr{A}^{p,\bullet}(E), \overline{\partial}\right)$$

Theorem

Soit $M = G/\Gamma$ *une nilvariété parallelisable complexe compacte.Alors l'inclusion* i *induit un isomorphisme*

$$H^{p,q}(\mathfrak{g},\mathbb{C}) \simeq H^{p,q}(M,\mathbb{C})$$

Contrôle de la déformation

On reprend les hypothèses du théorème précédent, i.e. $M = G/\Gamma$ est une nilvariété complexe, compacte et parallelisable. En particulier, comme M est parallelisable Θ le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes est isomorphe à $\mathscr{O}_M \otimes TM$ et $TM \simeq \mathfrak{g}$. On obtient alors

$$H^q(M,\Theta) = H^q(M,\mathscr{O}_M \otimes \mathfrak{g}) \simeq H^q(M,\mathscr{O}_M) \otimes \mathfrak{g} \simeq H^{0,q}(M,\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{g} \simeq H^{0,q}(\mathfrak{g},\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{g}$$

Famille de Kuranishi

L'objectif au début était de construire une déformation verselle. Kuranishi démontra pour toute variété complexe compacte M, l'existence d'une déformation verselle.

Famille de Kuranishi

L'objectif au début était de construire une déformation verselle. Kuranishi démontra pour toute variété complexe compacte M, l'existence d'une déformation verselle.Il démontra qu'il existe une famille au dessus d'un espace $\mathbb{C}$-analytique dans $H^1(M, \Theta)$ défini par le zéro d'une application holomorphe $k : H^1 \to H^2$.

Famille de Kuranishi

L'objectif au début était de construire une déformation verselle. Kuranishi démontra pour toute variété complexe compacte M, l'existence d'une déformation verselle.Il démontra qu'il existe une famille au dessus d'un espace $\mathbb{C}$-analytique dans $H^1(M,\Theta)$ défini par le zéro d'une application holomorphe $k: H^1 \to H^2$.On appelle l'espace de Kuranishi, le germe (en 0) de la base de cette famille verselle.

Famille de Kuranishi

L'objectif au début était de construire une déformation verselle. Kuranishi démontra pour toute variété complexe compacte M, l'existence d'une déformation verselle.Il démontra qu'il existe une famille au dessus d'un espace $\mathbb{C}$-analytique dans $H^1(M,\Theta)$ défini par le zéro d'une application holomorphe $k : H^1 \to H^2$.On appelle l'espace de Kuranishi, le germe (en 0) de la base de cette famille verselle.
L'application k n'est pas évidente à calculer en général et l'espace analytique peut être assez "moche". Cependant, un résultat intéressant publié dans un article de Rollenske est le suivant

Famille de Kuranishi

L'objectif au début était de construire une déformation verselle. Kuranishi démontra pour toute variété complexe compacte M, l'existence d'une déformation verselle.Il démontra qu'il existe une famille au dessus d'un espace $\mathbb{C}$-analytique dans $H^1(M,\Theta)$ défini par le zéro d'une application holomorphe $k : H^1 \to H^2$.On appelle l'espace de Kuranishi, le germe (en 0) de la base de cette famille verselle.
L'application k n'est pas évidente à calculer en général et l'espace analytique peut être assez "moche". Cependant, un résultat intéressant publié dans un article de Rollenske est le suivant

Theorem

Si $M = G/\Gamma$ est une nilvariété parallelisable complexe et compacte telle que $\mathfrak{g}$ est ν-nilpotente alors l'espace de Kuranishi est donné par des équations polynomiales de degré au plus ν.

En particulier si $\mathfrak{g}$ est libre et 2-nilpotente alors l'espace de Kuranishi est lisse.

David Mumford.
Abelian varieties, volume 5 of *Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics*.
Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Hindustan Book Agency, New Delhi, 2008.
With appendices by C. P. Ramanujam and Yuri Manin, Corrected reprint of the second (1974) edition.