Fibrés en droites sur le cercle

Licence 3$^{\textbf{ème}}$ année

Rebecca Duperray
Nina Mousseau
Jean Mousseau (°°)

Rapport présenté pour l'examen de
fin d'année

Département de Mathématiques
Université d'Angers
France
2021-2022

Figure 1 – Œuvre de Keizo Ushio, Ruban de Möbius, Granite, 2 mètres. (Mihama, Japon, 1990)

Résumé et introduction

Cette représentation artistique du Ruban de Möbius de Keizo Ushio met en évidence une particularité géométrique de cet objet. À savoir sa connexité. Cette sculpture est en réalité un ruban de Möbius auquel on a simplement retiré la section nulle.

On doit la découverte de ce ruban à August Ferdinand Möbius (1790-1868), décrit comme étant un homme réservé et étourdi. C'est en 1858, à presque 70 ans, qu'il a découvert cette célèbre figure aux remarquables propriétés : le ruban de Möbius. Ce ruban est célèbre grâce à son bord unique. Il s'agit d'une des premières figures à un seul bord étudiées en mathématiques.

Au travers de cette œuvre, nous pouvons entrapercevoir la beauté de son caractère mathématique ainsi que l'intérêt que nous lui avons porté durant ce projet.

Pour parler maintenant de notre projet, résumons les différentes étapes qui vont suivre. Dans un premier temps, nous présenterons des rappels importants qui sont utiles et nécessaires pour développer les autres parties. Cette première partie est illustrée avec de multiples exemples. Nous y développerons des définitions de topologie, ferons quelques rappels sur les différentielles et enfin nous nous intéresserons aux actions de groupes. Ensuite nous définirons les notions de variété, sous-variété et variété quotient. Pour finir, nous nous focaliserons sur le sujet central de ce projet à savoir les fibrés en droites sur le cercle. Pour ce faire, nous nous attarderons sur quelques définitions essentielles, telles que le fibré vectoriel et la section. Ce qui nous mène à définir le ruban de Möbius ainsi que le fibré trivial, afin de traiter la classification des fibrés en droite sur le cercle qui est l'objectif final du projet.

Nous tenons à remercier tout particulièrement Théo Jamin et Antoine Boivin qui nous ont accompagnés tout au long de ce projet. Ainsi que Daniel Naie pour l'aide qu'il nous a apporté. Bonne lecture !

Table des matières

1 Définitions **5**
1.1 Prérequis de topologie 5
1.2 Rappels sur les différentielles 5
1.3 Actions de groupes 7

2 Variétés et sous-variétés **8**
2.1 Variétés 8
2.2 Sous-variétés 11
2.3 Variétés quotient 11

3 Fibrés **12**
3.1 Fibré vectoriel 12
3.2 Sections 13
3.3 Classification des fibrés de $\mathbb{S}^1$ 14

4 Références **17**

1 Définitions

1.1 Prérequis de topologie

On parlera de $\mathbb{R}^n$ par abus de language pour parler de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O})$ avec $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$ vue comme un espace métrique muni de la norme euclidienne.

Définition 1. (Homéomorphisme)
Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. M est dit homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ avec $m \leq n$ s'il existe une application homéomorphe

$$f : M \to \mathbb{R}^n$$

C'est-à-dire continue et bijective dont la bijection réciproque est continue.

Exemple 2. Soit f définit par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}) \end{array}$$

est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ car f et f^{-1} sont continue.

On parle d'homéomorphisme *local* lorsque pour tout ouvert U de M, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$f : U \to V \text{ soit un homéomorphisme}$$

i.e. U et V sont homéomorphes.

Définition 3. (Compacité)
On dit qu'un espace E est compact s'il vérifie ces deux conditions :
i. E est séparé, c'est-à-dire un espace topologique dans lequel deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints.
ii. E vérifie la propriété de *Borel-Lebesgue* : De tout recouvrement de E par des ouverts de $\mathbb{R}^n$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Exemple 4. Les sous-ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^n$ sont des espaces compacts.

Définition 5. (Partition de l'unité)
On appelle partition de l'unité d'un espace topologique E, une famille $(\phi_i)_{i\in I}$ de fonctions continues, définies sur E et à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, telles que pour tout point $x \in E$, les deux conditions suivantes sont satisfaites :
— il existe un voisinage de x tel que toutes les fonctions ϕ_i soient nulles sur ce voisinage à l'exception d'un nombre fini d'entre elles ;
— la somme de toutes les valeurs prises par les fonctions ϕ_i en x est égale à 1, c'est-à-dire : $\sum_{i\in I} \phi_i(x) = 1$ pour tout $x \in E$.

Théorème 6. *Pour tout recouvrement ouvert fini d'un espace compact, il existe une partition de l'unité subordonnée au recouvrement.*

Par la suite, on admettra ce théorème. Le lecteur intéressé trouvera la preuve dans [1, p. 204].

1.2 Rappels sur les différentielles

Pour décrire les sous-variétés, nous ferons appel à des *submersions* et *immersions*. Avant de présenter ces nouveaux termes, nous aurons besoin de rappeler quelques notions sur les différentielles. On pose $E \subset \mathbb{R}^n$ et $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Définition 7. (Différentielle)
Soit $a \in E$ et U un voisinage de a dans E et $f : E \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est différentiable en a si, et seulement si, il existe une forme linéaire $df(a) \in \mathrm{L}(E, \mathbb{R})$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + h\epsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

Afin d'introduire la jacobienne de la différentielle, nous considérons les notions de dérivées directionnelle et partielle comme acquises. Nous ne le détaillerons pas ici, étant donné que ce n'est pas le but de notre projet.

Proposition 8. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et U un voisinage de $a \in E$ avec f différentiable en a. Nous en déduisons le point suivant $df(a)(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$*

Démonstration. Nous considérons cette proposition vraie car nous n'avons pas besoin de rentrer dans les détails des calculs différentiels. □

Rappelons la forme de la matrice jacobienne ainsi qu'une proposition permettant d'étendre l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ à V un espace à dimension finie.

Définition 9. (Matrice Jacobienne)
Soit F une fonction de E dans $\mathbb{R}^n$ qui admet des dérivées partielles en tout point $a \in U$. La Jacobienne de F est définie par

$$\mathrm{Jac}(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition 10. *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ alors*

$$F'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$$

Pour conclure ce petit rappel sur les dérivées nous rappellerons une formule très pratique que nous utiliserons par la suite.

Proposition 11. *Soit a dans un ouvert U de E et $F : E \to \mathbb{R}^n$ avec m la dimension de E un espace vectoriel. On prendra $\vec{v} \in E$.*

$$dF(a)(\vec{v}) = Jac(F(a))(\vec{v})$$

Démonstration. Pour montrer la proposition précédente, nous utiliserons la linéarité de la différentielle. Soit $\vec{v} = \sum_{k=1}^{m} h_k e_k$ où $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ est la base canonique de E. Sur les mêmes données que précédemment, on a

$$\begin{aligned} dF(a)(H) &= dF(a)\Big(\sum_{k=1}^{m} h_k e_k\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{m} h_k dF(a)(e_k) \end{aligned}$$

Par la proposition 8 on identifie les dérivées partielles.

$$\begin{aligned} dF(a)(H) &= \sum_{k=1}^{m} h_k \frac{\partial F}{\partial x_k}(a) \\ &= \mathrm{Jac}(F) \times \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons bien le résultat attendu. □

1.3 Actions de groupes

Nous allons maintenant introduire les actions de groupes. Elles nous seront utiles afin de décrire les relations d'équivalences qui nous permettront de construire des variétés quotients telles que le ruban de Möbius.

On ne s'attarde ici que sur les actions de groupe à gauche étant donné le but de notre projet.

Définition 12. (Action de Groupe (à gauche))
Soit E un ensemble et G un groupe, d'élément neutre e. On appelle *action* (ou opération) de G sur E, une loi externe

$$\begin{array}{ccccc} G & \times & E & \to & E \\ (g & , & x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

qui vérifie

$$\forall x \in E, e \cdot x = x \ et \ \forall (g, g') \in G \times G, \quad \forall x \in E$$

$$g' \cdot (g \cdot x) = (g'g) \cdot x$$

Exemple 13. 1. Pour illustrer cette définition, nous pouvons introduire l'action qui défini les espaces projectifs (que nous ne développerons pas ici)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^* & \times & \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\} & \to & \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\} \\ (\lambda & , & (x_1, \ldots, x_n)) & \mapsto & (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \end{array}$$

2. Une seconde action de groupe que nous pouvons présenter, en lien avec le sujet traité, est

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \times & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (n & , & (x, y)) & \mapsto & (n + x, y) \end{array}$$

Pour avoir le caractère libre d'une action, nous devons introduire les stabilisateurs.

Définition 14. (Stabilisateur)
On note St_x le stabilisateur de l'élément $x \in E$ sous l'action de G défini par

$$St_x = \{g \in G | g \cdot x = x\}$$

D'où la définition d'action libre suivante :

Définition 15. (Action libre)
On dit que G agit librement sur E si $\forall x \in E$, $St_x = \{e\}$

Définition 16. (Proprement discontinue)
On dit que G agit de façon proprement discontinue sur un ensemble E, si pour tout compact K de E, l'ensemble suivant

$$\{g \in G | g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

est fini.

Plus tard, nous verrons que le quotient d'une variété par un groupe agissant librement et de façon proprement discontinue est une variété.

Exemple 17. Pour donner un exemple, on va montrer que $\mathbb{Z}$ agit librement et de façon proprement discontinue sur $\mathbb{R}^2$, ce qui nous servira par la suite à construire les fibrés sur le cercle.

On définit l'action de groupe suivante

$$\begin{array}{cccccc} \Phi_1 : & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (n & , & (x, y)) & \mapsto & (n + x, y) \end{array}$$

L'action est libre, en effet $(n + x, y) = (x, y) \iff n = 0$, i.e. $St_{(x,y)} = \{0\}$.

Pour justifier que l'action est proprement discontinue, on commence par remarquer que l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^2$ est inclus dans la tribu borélienne qui est elle même engendrée par l'ensemble suivant

$$C = \{[a, b] \times [c, d] | (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\}$$

Ce qui restreint notre étude de tout compact de $\mathbb{R}^2$ à l'étude de l'ensemble C. Comme la fonction choisie est une translation, elle est donc bijective et continue. On remarque une bijection entre les éléments suivant pour $K = [a,b] \times [c,d]$

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid [a+n, b+n] \cap [a,b] \neq \emptyset\} \simeq \{n \in \mathbb{Z} \mid \Phi_1(n,K) \cap K \neq \emptyset\}$$

De la bijection, on en déduit l'égalité des cardinaux. Or a, b étant tout deux des réels finis, l'ensemble de gauche est fini d'où notre résultat

$$\begin{aligned}\#\{n \in \mathbb{Z} \mid \Phi_1(n,K) \cap K \neq \emptyset\} &= \#\{n \in \mathbb{Z} \mid [a+n, b+n] \cap [a,b] \neq \emptyset\} \\ &= \lfloor |b-a| \rfloor\end{aligned}$$

Pour traiter un autre exemple utile pour la suite, on définit une deuxième action

$$\begin{array}{cccccc} \Phi_2: & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (n & , & (x,y)) & \mapsto & (n+x, (-1)^n y) \end{array}$$

L'action libre est triviale étant donné $(n+x, (-1)^n y) = (x,y) \iff n = 0,$ i.e. $St_{(x,y)} = \{0\}$.

Pour l'action proprement discontinue, on commence par remarquer que l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^2$ est inclus dans la tribu borélienne qui est elle même engendrée par l'ensemble suivant

$$C = \{[a,b] \times [c,d] | (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\}$$

Ce qui restreint notre étude de tout compact de $\mathbb{R}^2$ à l'étude de l'ensemble C. On remarque qu'il ne peut y avoir plus d'élément dans l'ensemble ci-dessous que dans l'ensemble traité précédemment ($\{n \in \mathbb{Z} \mid \Phi_1(n,K) \cap K \neq \emptyset\}$). On pose $K = [a,b] \times [c,d]$ on a donc

$$\#\{n \in \mathbb{Z} \mid \Phi_2(n,K) \cap K \neq \emptyset\} \leq \#\{n \in \mathbb{Z} \mid \Phi_1(n,K) \cap K \neq \emptyset\}$$

Que l'on justifie par l'injection suivante

$$\begin{array}{cccc} f: & \{n \in \mathbb{Z} \mid \Phi_2(n,K) \cap K \neq \emptyset\} & \to & \{n \in \mathbb{Z} \mid \Phi_1(n,K) \cap K \neq \emptyset\} \\ & n & \mapsto & n \end{array}$$

Nous avons bien une action libre et proprement discontinue.

Ces exemples nous permettrons par la suite de former le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ par les relations d'équivalences données par Φ_1 ou Φ_2, qui seront plus détaillées dans l'exemple 32.

On pourra noter que l'action de groupe définit une relation d'équivalence pour un quotient.

2 Variétés et sous-variétés

2.1 Variétés

Les variétés topologiques sont des espaces topologiques muni d'un atlas. Dans cette section nous approfondirons la notion de variété et de sous-variété topologique. Nous voyons donc toutes variétés comme une modification de $\mathbb{R}^n$ où nous avons conservé certaines propriétés comme la séparation de l'espace topologique, par les applications *homéomorphes*. Les premières définitions découlent donc de cette idée que l'on se fait des variétés.

On prendra donc, sauf contre indication, l'espace topologique $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O})$ muni de la topologie $\mathcal{O}$ de l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$ vue comme un espace métrique (muni de la norme euclidienne).

Définition 18. (Variété topologique)

On dit que M est une variété topologique si c'est un espace topologique paracompact et séparé localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire si tout point de M possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 19. L'espace topologique $\mathbb{R}^n$ est une variété topologique car $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à lui même.

Définition 20. (Cartes et atlas)

a) Une carte d'une variété topologique M est la donnée d'un couple (U,φ) formé d'un ouvert U de M (le domaine de la carte) et d'un homéomorphisme φ de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

b) Un atlas de M est une famille $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ (I dénombrable) de cartes, dont les domaines U_i recouvrent M.

Il est maintenant important de définir les variétés différentielles à l'aide des fonctions de transition.

Définition 21. (Fonctions de transition) Soit M une variété et $(U_i, \varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i))_{i\in I}$ un atlas. On définit les fonctions de transition (aussi appelées applications de changement de cartes) sur les intersections des U_i

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\alpha,\beta}: & U_\alpha \cap U_\beta & \to & U_\alpha \cap U_\beta \\ & e & \mapsto & \varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\beta(e) \end{array}$$

Remarque 22. Un atlas est dit de classe $\mathcal{C}^k, k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ si toute fonction de transition est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Une variété différentielle est une variété topologique M dont toutes fonctions de transitions sont des difféomorphismes. C'est-à-dire, que l'on obtient M comme un recollement d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ par des difféomorphismes.

Plus formellement, nous pouvons poser la définition ci-dessous.

Définition 23. (Variété différentielle)

Soit M une variété topologique. Elle est dite *variété différentielle (ou différentiable)* de classe $\mathcal{C}^k, \forall k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ si elle est munie d'un atlas de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 24. *Soit M, N deux variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^k$. Alors $M\times N$ est aussi une variété de classe $\mathcal{C}^k$.*

Démonstration. On définit les atlas suivant pour M et N avec V_i^1 et V_i^2 des ouverts de $\mathbb{R}^n$:

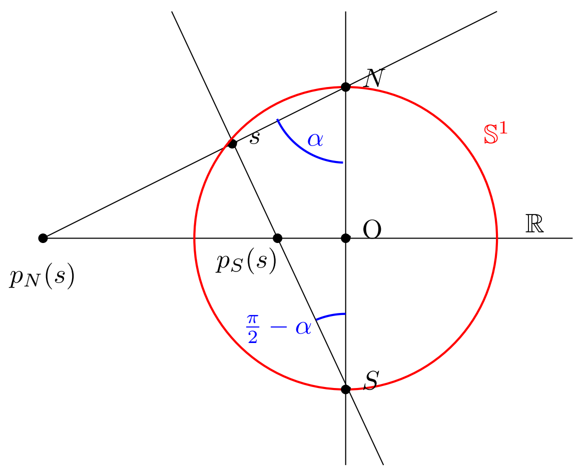
$$(M_i \ ,\ \varphi_i : M_i \to V_i^1)_{i\in[\![1,n_1]\!]} \quad (N_i \ ,\ \vartheta_i : N_i \to V_i^2)_{i\in[\![1,n_2]\!]}$$

Ce qui nous donne pour $M\times N$ l'atlas suivant

$$(M_i\times N_i, \varrho_i : M_i\times N_i \to V_i^1\times V_i^2)_{i\in[\![1,n_1n_2]\!]}$$

d'où le résultat. □

Exemple 25. (Cercle $\mathbb{S}^1$)



On note $N=(0,1)$ et $S=(0,-1)$ respectivement le *pôle Nord* et le *pôle Sud* de $\mathbb{S}^1$. Notons les projections stéréographiques

$$p_N : \mathbb{S}^1 - \{N\} \to \mathbb{R}$$
$$p_S : \mathbb{S}^1 - \{S\} \to \mathbb{R}$$

qui à un point $s \in \mathbb{S}^1$ associe la projection sur la droite d'équation $y = 0$ de $\mathbb{R}^2$ pour le pôle concerné. Nous les explicitons ci-dessous. Soit $s \in \mathbb{S}^1$ on a $s = (x, y)$

$$\begin{array}{rccc} p_N & : \mathbb{S}^1 - \{N\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \mapsto & \frac{x}{1-\mathrm{sign}(y)\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

On voit que pour $y < 0$ ou $y > 0$ la fonction est bien continue et en $y = 0$ on a $p_N(s) = \mathrm{sign}(x)$ ce qui prolonge par continuité la fonction comme on peut l'observer sur la Figure 2.

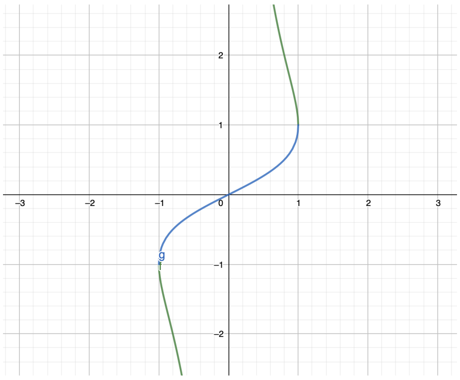


FIGURE 2 – p_N

Pour l'application inverse, on trouve l'application suivante qui est aussi continue comme on peut le voir sur la Figure 3.

$$\begin{array}{rccc} p_N^{-1} & : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{S}^1 - \{N\} \\ & x & \mapsto & (\frac{2x}{1+x^2}, y) \end{array}$$

$\left(y^2 = 1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2\right)$

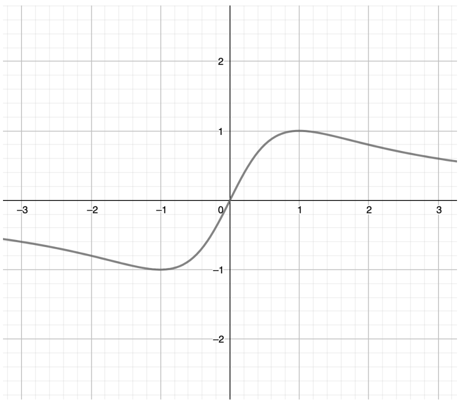


FIGURE 3 – p_N^{-1}

On peut grâce aux formules de trigonométrie faire le lien entre $|p_N|$ et $|p_S|$, donné par l'angle α entre l'axe des abscisses et la droite passant par N et $s \in \mathbb{S}^1$. On obtient $\tan(\alpha) = |p_N(s)|$ et $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = |p_S(s)|$, donc $|p_N(s)| = \frac{1}{|p_S(s)|}$. Ce qui nous donne la fonction de transition :

$$\begin{array}{rccc} p_S \circ p_N^{-1} & : \mathbb{R} - \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \quad \begin{array}{rccc} p_N \circ p_S^{-1} & : \mathbb{R} - \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Comme on peut le voir, $p_S \circ p_N^{-1}$ et $p_N \circ p_S^{-1}$ sont bien des difféomorphismes comme $p_S \circ p_N^{-1}$ et $p_N \circ p_S^{-1}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Comme les ouverts $\mathbb{S}^1 - \{N\}$ et $\mathbb{S}^1 - \{S\}$ recouvrent $\mathbb{S}^1$ on peut en déduire que $\big\{(\mathbb{S}^1 - \{N\}; p_N); (\mathbb{S}^1 - \{S\}; p_S)\big\}$ forme un atlas sur $\mathbb{S}^1$ et que $\mathbb{S}^1$ est une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2.2 Sous-variétés

Intuitivement, une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ est une réunion d'ouverts qui peuvent chacun être "redressé" de façon à former des ouverts de $\mathbb{R}^p$.

Définition 26. (Sous-variété)
Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si pour tout x de M, il existe deux voisinages U de x dans $\mathbb{R}^n$ et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et un difféomorphisme

$$f : U \to V \quad \text{tel que} \quad f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

Notons que p est unique, autrement dit que le difféomorphisme $f : M \to \mathbb{R}^n$ a une image contenue dans $\mathbb{R}^p$, où p est fixé pour tout $x \in M$.

Définition 27 (Submersion et immersion)**.** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
- On dit que $f : U \to V$ est une submersion si pour tout $x \in U, df(x)$ est surjective. Par équivalence, on a alors $(df_1(x), \dots, df_p(x))$ forme une famille libre.
- On dit que $f : U \to V$ est une immersion si pour tout $x \in U, df(x)$ est injective.

Théorème 28. *Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. *M est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Pour tout $a \in M$, il existe U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $a \in U$ et une submersion $g : U \to \mathbb{R}^n$ tel que*
$$U \cap M = g^{-1}(\{0\})$$
3. *Pour tout $a \in M$, il existe U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $x \in U$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, avec $0 \in \Omega$ et une immersion $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui est aussi un homéomorphisme de Ω à $U \cap M$.*

Par la suite, on admettra ce théorème. Le lecteur intéressé trouvera la preuve dans [1, p. 29-30]

Exemple 29. ($\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$)
Nous avons vu plus haut que les projections stéréographiques munissent $\mathbb{S}^1$ d'une structure de variété $\mathcal{C}^\infty$, regardons maintenant les sphères $\mathbb{S}^{n-1}$ comme des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ par image réciproque d'une submersion grâce à l'équivalence du Théorème 28

Soit $\mathbb{S}^{n-1}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ définie comme le préimage de 0 par la submersion suivante

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x\|^2 - 1 \end{array}$$

($\|.\|$ la norme euclidienne définie sur $\mathbb{R}^n$)

On se propose de montrer que $\mathbb{S}^{n-1}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$. f est bien une submersion car la différentielle

$$df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_n \end{pmatrix}$$

est surjective en tout point de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Donc $\mathbb{S}^{n-1}$ est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2.3 Variétés quotient

Cette sous-section sera utile pour introduire la construction du fibré trivial et du ruban de Möbius comme des variétés quotient.

Définition 30. (Quotient d'un groupe par une variété (à gauche))
Soit G un groupe agissant sur une variété M par l'action "$\cdot$". On définit le quotient noté M/G l'ensemble des classes à gauche d'un élément x de M sur un élément g de G. On note ses éléments

$$\overline{x} = \{y \in M \mid \exists g \in G, g \cdot y = x\}$$

Les quotients d'une variété par un groupe nous permettent de créer des variétés grâce à ces actions de groupes libres et proprement discontinues.

Théorème 31. *Soit G un groupe et E une variété. Si G agit librement, de façon proprement discontinue et différentiablement sur E, alors il existe sur E/G une unique structure de variété.*

On admettra ce théorème. Le lecteur intéressé trouvera la preuve dans [1, p. 74-75]

Ce résultat important nous permet d'avancer dans la manipulation des fibrés. Pour illustrer cela, nous pouvons introduire l'une des variétés de ce projet : le ruban de Möbius. Ce théorème nous sera utile lors de prochaines démonstrations, notamment dans le cas du ruban de Möbius.

Exemple 32. On sait que l'application Φ_2 définie dans l'exemple 17 par

$$\begin{array}{cccccc} \Phi_2 : & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (n & , & (x,y)) & \mapsto & (n+x, (-1)^n y) \end{array}$$

est une action proprement discontinue et libre. Ainsi par le Théorème 31, le quotient de $\mathbb{R}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}$ donnée par Φ_2 est bien une variété. De plus cette variété définit le ruban de Möbius car l'action de groupe définit une relation d'équivalence.

En effet, soit $\overline{x}$ une classe d'équivalence de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, on peut définir $\overline{x}$ par

$$\overline{x} = \{y \mid \exists n \in \mathbb{Z}, y = \Phi_2(n, x)\}$$

Définition 33. La relation d'équivalence induite par Φ_2 nous donne l'écriture suivante du ruban de Möbius

$$I \times \mathbb{R}/\mathcal{R}_2$$

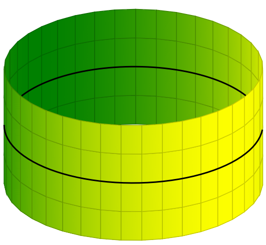
où $I = [0,1]$, et $\mathcal{R}_2$ la relation défini par $(0,u)\mathcal{R}_2(1,-u)$

Pour $\mathbb{S}^1$ vu comme le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par l'action $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n,u) \mapsto n+u$ induit la relation d'équivalence suivante

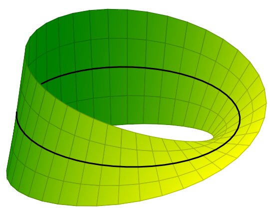
$$\mathbb{S}^1 \simeq I/\sim \quad 0 \sim 1$$

et on peut observer la même chose pour le cylindre par l'action Φ_1 vue comme le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$

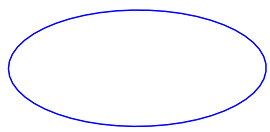
$$I \times \mathbb{R}/\mathcal{R}_1 \quad (0,u)\mathcal{R}_1(1,u)$$



$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$



Möbius



$\mathbb{S}^1$

3 Fibrés

3.1 Fibré vectoriel

Pour définir un fibré vectoriel, nous aurons besoin de la définition de fibre au dessus d'un élément $b \in B$.

Définition 34. (Fibre au dessus de x)

Soit $p : E \to B$ une projection de classe $\mathcal{C}^k$ et E, B des variétés de classe $\mathcal{C}^k$. On définit la fibre de $b \in B$ comme sa préimage par p. On écrit donc

$$E_b = \{v \in E \mid p(v) = b\}$$

Ce qui nous amène à la définition du fibré sur laquelle on s'attarde à conserver une continuité.

Définition 35. (Fibrés vectoriels réels) Soit F un espace vectoriel de dimension finie. On appelle *fibré vectoriel* de fibre F, une submersion surjective de classe $\mathcal{C}^\infty$, $p : E \to B$ entre deux variétés différentiables E et B telle que

$$\forall b \in B,\ p^{-1}(b) \simeq F$$

Proposition 36. *Soit $p : E \to B$ un fibré vectoriel, pour tout $b \in B$ il existe U un ouvert contenant b appelé ouvert trivialisant tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi_U"] \arrow[dr, "p"] & & U \times F \arrow[dl, "p_{r_1}"] \arrow[dr, "p_{r_2}"] & \\ & U & & F \end{tikzcd}$$

commute, et tel que pour tout $y \in U$, $p_{r_2} \circ \phi_U|_{E_y} : p^{-1}(U) \to F$ soit un isomorphisme linéaire.

ϕ_U est appelé la trivialisation locale de p au dessus de U.

On peut facilement en déduire que le fibré admet une trivialisation locale, en effet il existe bien un recouvrement d'ouvert trivialisant puisqu'en tout point de B il existe bien un voisinage satisfaisant le diagramme ci-dessus.

Remarque 37. Soit n la dimension d'une fibre c'est-à-dire celle de F, et m la dimension de B, alors la dimension de E est $m + n$. Si $n = 1$, on parlera de fibré en droites réelles.

Définition 38. (Atlas de trivialisation locale) Soit $p : E \to B$ un fibré vectoriel, on appelle atlas de trivialisation locale une collection (U_i, ϕ_i) d'ouverts trivialisants recouvrant B.

Pour obtenir des exemples assez simples, nous devons définir la notion de fibré trivial et trivialisable.

Définition 39. (Fibré trivialisable, trivial)

Un fibré vectoriel est dit trivialisable s'il existe une trivialisation composée d'une carte. Il est dit trivial lorsqu'une telle carte est précisée, ce qui l'identifie au produit cartésien de la base B et de la fibre F.

Exemple 40. (Fibrés triviaux)

De façon évidente, la première projection $p_{r_1} : M \times \mathbb{R}^n \to M$ est un fibré vectoriel de base M, de rang n appelé *fibré vectoriel réel trivial.*

L'exemple de notre sujet est le fibré trivial sur $\mathbb{S}^1$ définit par la première projection $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$

Définition 41. (Morphisme de fibrés) Un *morphisme de fibrés* entre deux fibrés $p_1 : E \to B$ et $p_2 : E' \to B$ au-dessus de B est une application de classe $\mathcal{C}^k$: $f : E \to E'$ entre les espaces totaux qui est compatible avec les projections : $p_2 \circ f = p_1$.

Un isomorphisme de fibré en droites est un isomorphisme de fibré qui est linéaire en restriction à chaque fibre. Un *isomorphisme de fibrés* est un morphisme de fibrés qui est un difféomorphisme.

Définition 42. (Classe d'isomorphsime de fibrés) Soient deux fibrés définis respectivement par $p_1 : E \to B$ et $p_2 : E' \to B$, avec E, E' deux espaces totaux et B la base, s'il existe un isomorphisme $\phi : E \to E'$ de classe $\mathcal{C}^k$ alors les fibrés appartiennent à la même classe d'isomorphisme.

3.2 Sections

Nous introduisons les sections pour un résultat intéressant pour la classification des fibrés en droites sur le cercle, qui est le but de notre projet.

Définition 43. (Sections)

Une section d'un fibré vectoriel E de base B est une application lisse s de B dans E telle que $p \circ s = Id_B$. Dans notre cas, B sera une $\mathcal{C}^k$-variété, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Pour donner un exemple de section, nous pouvons introduire la *section nulle* qui en tout point $b \in B$ associe le vecteur nul de la fibre au dessus de b.

Voici le résultat important

Proposition 44. *Soit E un fibré en droites de base B et $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ des ouverts trivialisants qui recouvrent B, E est trivialisable si et seulement si il existe s une section telle que $p_{r_2} \circ \phi_i \circ s : B \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas.*

Démonstration. La démonstration se fait en deux parties :

$\Rightarrow$ Si E est trivialisable alors, il existe le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \times \mathbb{R} \arrow[dr, "p_{r_1}"'] & & E \arrow[ll, "\phi"'] \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

qui commute. Avec ϕ un difféomorphisme. Nous pouvons évidemment définir la section s_1 de la manière suivante, étant donné la structure de $B \times \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} s_1 : & B & \to & B \times \mathbb{R} \\ & b & \mapsto & (b, 1) \end{array}$$

la fonction $p_{r_2} \circ s_1$ est bien non nulle et continue.

Nous pouvons maintenant définir la section qui nous intéresse par $s = \phi^{-1} \circ s_1$, qui a toutes les conditions requises pour être une section de B dans E : elle est continue et la deuxième condition pour une section est aussi justifiée par la commutativité du diagramme

$$p \circ s = p_{r_1} \circ \phi \circ s = Id_B$$

Effectivement s est bien une section et on a de plus la condition $p_{r_2} \circ \phi \circ s : B \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas.

$\Leftarrow$ Soit s une section telle que $p_{r_2} \circ \phi \circ s : B \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas. Pour montrer qu'il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels entre $B \times \mathbb{R}$ et E, nous pourrons constater que l'application suivante définit bien un isomorphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{array}{rccc} \phi : & B \times \mathbb{R} & \to & E \\ & (b, \lambda) & \mapsto & \lambda s(b) \end{array}$$

on remarque que $s(b) \in E_b$, or la fibre est un espace vectoriel d'une dimension et comme $s(b)$ n'est pas l'élément nul de la fibre, il est bien générateur de E_b. La fonction est de plus lisse par la continuité de s.

Donc E est bien trivialisable.

□

Remarque 45. Plus tard, nous utiliserons le cas où $B = \mathbb{S}^1$. En effet, cela nous sera utile dans la démonstration du Théorème 48.

3.3 Classification des fibrés de $\mathbb{S}^1$

Pour commencer nous allons montrer qu'il existe bien au moins deux classes d'isomorphismes de fibrés en droites différentes sur cercle. Pour cela, nous allons utiliser l'équivalence trouvée dans la partie 3.2. Il nous reste donc simplement à prouver qu'il n'existe pas de section non nulle sur le ruban de Möbius. Ainsi nous aurons deux classes de fibrés sur $\mathbb{S}^1$, il ne restera plus qu'à voir que tout autre fibré est bien isomorphe à l'un ou l'autre.

Pour commencer, nous rappelons la construction du ruban de Möbius et du fibré trivial faite dans l'exemple 32.

On rappelle les deux actions de groupe qui vont correspondre aux deux variétés qui nous intéressent :

$$\Phi_1 : \begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \times & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (n & , & (x,y)) & \mapsto & (n+x,y) \end{array} \qquad \Phi_2 : \begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \times & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (n & , & (x,y)) & \mapsto & (n+x,(-1)^n y) \end{array}$$

On a donc le fibré trivial défini comme variété quotient par $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ sous l'action de Φ_1, et le ruban de Möbius défini comme variété quotient par $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ sous l'action de Φ_2.

Proposition 46. *Le ruban de Möbius n'est pas trivialisable.*

Démonstration. Soit $I = [0,1]$ et la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $(0,x) \sim (1,-x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Soit $\sigma : \mathbb{S}^1 \to (I \times \mathbb{R})/\mathcal{R}$ une section, or $\mathbb{S}^1$ peut être vue comme $I/\sim$ comme dans l'exemple 32 (avec $0 \sim 1$). Donc σ définit bien une fonction continue $s : I \to \mathbb{R}$ où $s(0) = -s(1)$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires et par continuité de s il existe $\alpha \in I$ tel que $s(\alpha) = 0$. L'hypothèse d'existence de sections qui ne s'annulent jamais sur le ruban de Möbius est donc fausse.

Il n'est donc pas trivialisable par la proposition 44 d'où le résultat.

□

Corollaire 47. *Les fibrés trivial et Möbius ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. On sait que Möbius n'est pas trivialisable par la proposition 46. Si le fibré trivial et Möbius étaient isomorphes, Möbius serait trivialisable or ce qui n'est pas le cas. Donc le fibré trivial et Möbius ne sont pas isomorphes. □

Grâce aux constructions du Ruban de Möbius et du fibré trivial sur $\mathbb{S}^1$, nous pouvons nous ramener à la proposition de notre projet qui nous indique qu'il n'existe que deux classes d'isomorphismes de fibrés.

Théorème 48. *(Classification des Fibrés de $\mathbb{S}^1$)*

Il n'existe que deux classes d'isomorphismes de fibrés en droites sur le cercle : le fibré trivial $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et le ruban de Möbius M.

Démonstration. Soit X un fibré en droites sur $\mathbb{S}^1$ définit par sa construction $p : E \to \mathbb{S}^1$ (et notons de nouveau $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ le fibré trivial et M le ruban de Möbius).

Pour commencer, nous savons qu'il existe pour tout point $x \in \mathbb{S}^1$ un voisinage I_x dans $\mathbb{S}^1$ de x tel que $p^{-1}(I_x)$ soit isomorphe au fibré trivial $I_x \times \mathbb{R}$. On sait grâce à la proposition 44 qu'une trivialisation est équivalente à l'existence d'une section $s : I_x \to I_x \times \mathbb{R}$ telle que $p_{r_2} \circ s > 0$, d'où l'existence de la famille

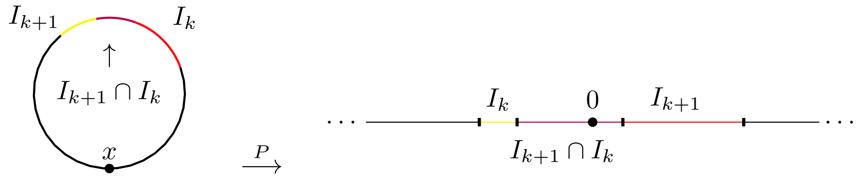
$$\{I_k \text{ connexe} \; ; \; s_k : I_k \to I_k \times \mathbb{R}\}_{k \leq n} \quad \text{avec la condition} \quad p_{r_2} \circ s_k > 0 \; \forall, k \leq n.$$

qui est finie par compacité de $\mathbb{S}^1$. On s'attarde maintenant sur les différentes valeurs que peut prendre n.

-cas $n = 1$ Le fibré est trivial par définition.

-cas $n > 2$

On a donc la famille précédente qui forme un recouvrement de $\mathbb{S}^1$. Si $n > 2$, on peut supposer l'intersection de deux ouverts I_k et I_{k+1} connexe. Sinon deux ouverts suffisent à recouvrir $\mathbb{S}^1$ et on se ramène au cas $n = 2$. Soit x n'appartenant pas à $I_k \cap I_{k+1}$ ce qui nous permet d'utiliser une projection stéréographique (notée P) sur $\mathbb{S}^1 - x$, on a donc un isomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{S}^1 - x$. Or la connexité se transmet par homéomorphisme et les deux ouverts I_k et I_{k+1}, qui sont des segments sur $\mathbb{R}$ par la projection, ont une intersection connexe. Nous illustrons ce discours par un dessin :



Nous procéderons par itération pour nous ramener au cas où $n = 2$.
Nous nous restreindrons d'abord à I_1 et I_2, on note χ_1, χ_2 une partition de l'unité sur $I_1 \cup I_2$ (où l'existence est justifiée par le Théorème 6), et p_{r_2} la projection de $(I_1 \cup I_2) \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Avec ces outils, nous construisons une section entre $I_1 \cup I_2$ et l'espace trivialisé $(I_1 \cup I_2) \times \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} S : & I_1 \cup I_2 & \to & (I_1 \cup I_2) \times \mathbb{R} \\ & e & \mapsto & \Big(e, \chi_1(e) p_{r_2}\big(s_1(e)\big) + \chi_2(e) p_{r_2}\big(s_2(e)\big)\Big) \end{array}$$

Nous allons montrer qu'il s'agit bien d'une section sur $I_1 \cup I_2$.
Par définition de la partition de l'unité, si $p(e) \in I_1 - I_2$ alors $\chi_2(e) = 0$ de ce fait $\chi_1(e) = 1$ et on aura bien le résultat voulu :

$$S(e) = \Big(e, p_{r_2}\big(s_1(e)\big)\Big) \in \phi_{I_1} \circ p^{-1}(e).$$

Au contraire, si $p(e) \in I_2 - I_1$ alors $\chi_1(p(e)) = 0$ de ce fait $\chi_2(p(e)) = 1$ et on obtient le même résultat. Dans l'intersection, il suffit de remarquer en plus que la fonction est lisse. En effet, si on note

$$S = (S_1, S_2) \qquad\qquad S^{(k)} = (S_1^{(k)}, S_2^{(k)}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a S_1 qui est l'identité donc lisse. Pour S_2, dérivation composé, et pour deux fonctions continues la composée et la somme de fonctions lisses sont encore lisses. On en conclut que S_2 est lisse.
On remarquera que S vérifie la même condition que tous les s_k (i.e $p_{r_2} \circ u > 0$).
Maintenant que nous savons "recoller" deux intervalles I_1 et I_2, on peut recoller $I_1 \cup I_2$ avec I_3 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux intervalles.

-cas $n = 2$

On nommera I et J les deux ouverts avec leurs applications

$$S_1 : I \to I \times \mathbb{R} \qquad\qquad S_2 : J \to J \times \mathbb{R}$$

Et on note K_1 et K_2 les composantes connexes de leur intersection (en effet $I \cap J$ n'est pas connexe ce qui nous empêche de tout recoller de la même façon que ci-dessus).
On peut recoller via une partition de l'unité de la même façon que précédemment le long de K_1 sans problème quitte à changer le signe d'un des deux S_i.
Le problème se pose sur K_2 lors du deuxième recollement. On voit apparaître deux cas, soit les applications sont de mêmes signes dans ce cas nous pouvons créer une section globale non nulle du fibré ce qui nous montre que X est trivial, soit les applications sont de signes contraires et dans ce cas X n'est pas trivial, car le recollement ci-dessous induit une annulation de notre section étant donné que $p_{r_2} \circ s_1(e) \times p_{r_2} \circ s_2(e) < 0$ pour tout $e \in K_2$.

$$\begin{array}{rccc} S : & K_2 & \to & K_2 \times \mathbb{R} \\ & e & \mapsto & \Big(e, \chi_1(e) p_{r_2}\big(s_1(e)\big) + \chi_2(e) p_{r_2}\big(s_2(e)\big)\Big) \end{array}$$

On a donc au plus deux classes d'isomorphismes que l'on connaît comme M et $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ne sont pas isomorphes par la proposition 46.

Ce qui nous amène à conclure la classification des fibrés sur $\mathbb{S}^1$.

□

4 Références

Références

[1] J. Lafontaine : *Introduction aux variétés différentielles, (1996).*

[2] F. Paulin : *Géométrie différentielle élémentaire, Cours de première année de master.* (2007), **Scheme E.68** p. 89.

[3] P. Pansu : *Chapitre 6 : Fibrés Vectoriels.* (2005), p. 1-3.

[4] A. Zinger : *Notes on Vector Bundles.* (2010), p. 1-3