

MathEnJeans

Sujet 1. Déplacement de cavalier.*

On place un cavalier sur une case d'un échiquier (on pourra commencer par un échiquier de taille 8×8 puis regarder ensuite d'autres exemples) et on veut passer par toutes les cases en suivant ces déplacements (en L comme aux échecs). Est-ce toujours possible de passer par toutes les cases ? Peut-on le faire sans passer deux fois par la même case ? Que se passe-t-il si l'on enlève une case, ou même deux... ?

Ref : Problème du cavalier.

Sujet 2. Périmètre infini et aire finie.*

Est-il possible de construire une forme géométrique au périmètre infini et à l'aire infinie ? Peut-on, à partir d'une figure, transformer ses côtés de manière à augmenter son périmètre sans augmenter son aire (voire sans la modifier) ? *Ref : Fractales.*

Sujet 3. Dénombrer des chemins.**

On considère une grille de taille $n \times n$. On cherche à connaître le nombre de chemins reliant le sommet en bas à gauche et celui en haut à droite et qui ne passent que par la grille. On pourra regarder après ce qui se passe si l'on interdit aux chemins de dépasser la diagonale.

Ref : Nombres de Catalan.

Sujet 4. Polygone aux sommets à coordonnées entières.**

On considère une grille infinie et on appelle points entiers, les points situés aux croisements de la grille. On construit un polygone ayant tous ces sommets sur des points entiers. Existe-t-il une relation entre le nombre de points entiers dans l'intérieur du polygone, le nombre de points situés sur ses arêtes et l'aire de celui-ci ? On pourra regarder ce qu'il se passe pour des polygones simples, comme les triangles, les rectangles puis on complexifiera ensuite.

Ref : Formule de Pick.

Sujet 5. Retrouver une puce.**

Vous avez devant vous une bande horizontale infinie formée par des petites cases numérotées. Un à moment donné, une puce est placée sur la case 0. Cette puce se déplace chaque minute en sautant un nombre n fixé de cases vers la droite.

Chaque minute, vous pouvez regarder une (et une seule) case et voir si la puce s'y trouve ou non. Sans connaître la position initiale de la puce, ni le nombre n de cases qu'elle saute à chaque minute, pouvez-vous trouver un algorithme pour scanner les cases méticuleusement et être sûrs de retrouver la puce ?

Que se passe-t-il si elle peut aussi choisir d'aller vers la gauche plutôt que d'aller vers la droite ?

Que se passe-t-il si, en plus, elle est placée sur une autre case (sans que vous sachiez laquelle) ?

Ref : Théorie des ensembles $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}^2$.

Sujet 6. Extinction du patronyme.***

Si on considère qu'un individu a une probabilité $1/2$ d'avoir 0 enfants et $1/2$ d'en avoir 1, quelle est la probabilité que sa descendance s'éteigne, autrement dit, que son patronyme disparaisse ? Que peut-on dire si l'on change les probabilités ? Et si ce même individu peut avoir aussi 3 enfants, 4 etc ?

Ref : Galton-Watson.

Sujet 7. Date d'anniversaire.***

Vous êtes à un repas de fête, autour de la table se trouve 3 personnes (vous y compris), quelle est la probabilité que deux personnes aient la même date d'anniversaire (mais pas nécessairement le même âge) ?

Que se passe-t-il pour 9 personnes ? Pour 23 ? Pour n personnes ?

Ref : Combinaisons.