Lycée Joachim du Bellay
2021-2022

MATh.en.JEANS

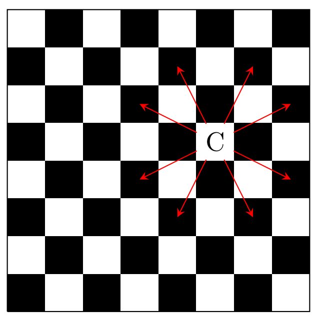
Théo Jamin & Ouriel Blœde
tjamin@math.univ-angers.fr, bloede@math.univ-angers.fr

Liste de sujets

Problème 1. Un avion a des places numérotées de 1 à n, avec n un entier naturel. Le jour de l'embarquement, toutes les places ont été attribuées à un passager et les passagers se présentent dans l'ordre de leurs numéros de siège. Le premier passager, ne respectant pas les règles, s'assoit au hasard (il est possible qu'il s'assoie à sa place attitrée). Les passagers suivants s'assoient à leur place attitrée si elle est libre et sinon s'assoient au hasard.

1. Pour $n = 2, 3$ ou 4, déterminer la probabilité que le dernier passager puisse s'asseoir à sa place.
2. Déterminer cette probabilité pour n quelconque.

Problème 2 (Difficile)**.** Aux échecs, un cavalier se déplace dans une direction d'une case en vertical ou en horizontal, puis d'une case en diagonal depuis la case atteinte selon le schéma suivant.



1. Montrer que quelque soit la case de départ du cavalier sur un échiquier 3×3, il n'existe pas de trajet où le cavalier passe une seule fois par chacune des cases de l'échiquier.
2. Trouver une solution pour un échiquier 4×4 dont on a retiré les coins.
3. Montrer que pour tout entier naturel n différent de 0, il n'existe pas de trajet d'un cavalier qui passe une seule fois par chacune des cases d'un échiquier $4 \times n$. (On pourra commencer par traiter à la main les cas $n = 1, 2$ et 3.)

Problème 3. On considère un échiquier de taille $n \times n$, avec n un entier naturel. À $t = 0$, un certain nombre m de cases sont infectées. On suppose qu'à chaque instant, si une case partage au moins deux côtés avec une case infectée elle devient infectée également.

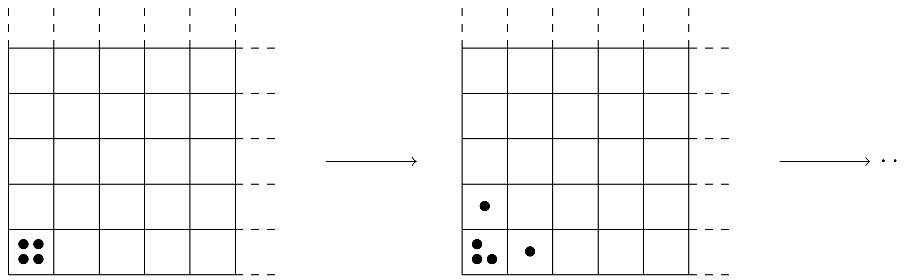
1. Pour $m = n$, trouver une situation de départ pour laquelle toute les cases finissent par être infectées.
2. Pour $m \leq n - 1$, justifier qu'il n'existe pas de situation de départ pour laquelle toutes les cases finissent par être infectées.

Problème 4. Vous participez à un jeu dans lequel, à chaque fois qu'une personne est touchée elle est éliminée. Vous êtes disposés en cercle est on vous attribue un numéro de 1 à n, pour n le nombre de joueurs, dans le sens des aiguilles d'une montre. Le premier joueur touche la personne suivante, qui est donc éliminée. Le joueur suivant fait de même et le jeu continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un joueur restant qui est déclaré vainqueur. Trouver un critère pour choisir votre place en fonction du nombre de joueurs n.

Problème 5 (Difficile)**.** Nous proposons deux sujets, a priori équivalents, choisissez celui que vous préférez.

Première version On considère une grille infinie, dont les lignes et les colonnes sont indexées par les entiers naturels. À la première étape, on place n pièces sur la case $(0,0)$. Ensuite, à chaque étape, on a le droit de retirer une pièce en (a,b) à condition d'en ajouter une en $(a+1,b)$ et une en $(a,b+1)$.

Exemple :

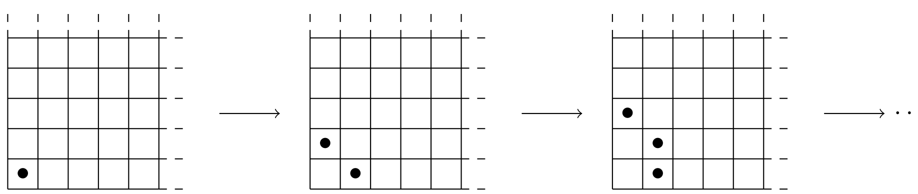


(a) Pour $n=2$ et 3, trouver comment se retrouver avec au plus une pièce par case en un nombre fini d'étapes.

(b) Montrer que pour $n=4$, on ne peut pas obtenir au plus une pièce par case en un nombre fini d'étapes. (Indice : on pourra penser aux pièces comme à des particules qui se divisent et s'inspirer de la conservation de la masse.)

Deuxième version Toujours sur cette même grille, on pose 1 pièce en bas à gauche de la grille. Et là encore, à chaque étape, on a le droit de retirer une pièce en (a,b) à condition d'en ajouter une en $(a+1,b)$ et une en $(a,b+1)$ mais cette fois, seulement si ces deux cases doivent être vides.

Exemple :



Est-il possible, en itérant ce processus, d'obtenir une grille dont le carré 3×3 en bas à gauche de la grille ne contient plus aucune pièce.