Lycée Guy Moquet - Etienne Lenoir
2021

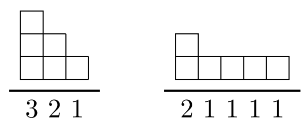
MATh.en.JEANS

Théo Jamin & Daniel Naie
tjamin@math.univ-angers.fr, daniel.naie@univ-angers.fr

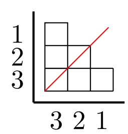
Liste de sujets

*La difficulté des sujets, notée de * à ***, n'est donnée qu'à titre indicateur.*

Sujet 1 (*** Partition d'entier)**.** Une partition d'un entier n est la donnée d'entiers $n_1, \ldots, n_k$ tels que leur somme soit égale à n. Par exemple, une partition de 6 est $1, 2$ et 3. On peut représenter une telle partition par des *cubes* empilés, appelée *diagramme de Young.* Par exemple :



De plus, dans le premier exemple, la partition est dite *autoduale* c'est-à-dire que le diagramme de Young correspondant est symétrique :



Questions.

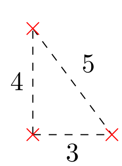
1. Combien de partition le nombre 18 admet-il ? Même question pour 34, 123 ? Pour n ?
2. Qu'obtient-on si l'on regarde des partitions qui ne contiennent pas le chiffre 1 ?
3. Combien de partition autoduale le nombre 6 admet-il ? Même question pour 34, 123 ? Ici encore, peut-on trouver une formule pour n ?

Sujet 2 (** Divisibilité)**.** On considère une urne contenant 6 boules numérotées de 0 à 5. On tire aléatoirement 3 boules et on note le nombre obtenu en concaténant, dans l'ordre, les chiffres obtenu.

Questions.

1. Quelle est la probabilité que le nombre obtenu soit divisible par 6 ? Par 11 ?
2. On considère maintenant une urne contenant des boules numérotées jusqu'à 10. On tire cette fois 5 boules et on fait le même procédé de notation. Quelle est la probabilité que le nombre obtenu soit divisible par 33 ? Par 396 ?
3. Que se passe-t-il avec un tirage de n boules dans une urne contenant $2n$ boules (toujours numérotées de 0 à $2n-1$) pour la divisibilité par 6, 11, 33, 66, 396, etc. ?

Sujet 3 (*** Points à distances entières)**.** On sait par existence des triplets Pythagoriciens (c'est-à-dire un triplet (x, y, z) d'entiers tel que $x^2 + y^2 = z^2$) qu'il est possible de trouver trois points dans le plan non-alignés qui sont deux à deux à distance entière



Questions.

1. Est-il possible de trouver 4 points dans le plan qui sont dans cette configuration, c'est-à-dire deux à deux à une distance entière ? Même question pour 5, 10, n points.

2. Peut-on le faire de façon récursive ? C'est-à-dire que si l'on a n points dans cette configuration, est-il possible de trouver un point (différent des n points précédents) qui soit encore à distance entière de ces n points ?

3. Peut-on trouver une infinité de points dans cette configuration ?

Sujet 4 (* Boîte d'allumettes vide)**.** Un Mathématicien achète deux boîtes d'allumettes identiques, chacune contenant exactement n allumettes, et les places ensuite dans sa poche. A chaque fois qu'il à besoin d'allumer un feu, il plonge la main dans sa poche et tire une de ses deux boîtes. Au bout d'un certain temps, une des boîtes se retrouve à court d'allumettes.

Questions. Soit k un autre entier, avec $k \leq n$. Quelle est la probabilité que l'autre boîte contienne encore plus de k allumettes ? Quelle est la probabilité qu'elle en contienne encore exactement k ?

Sujet 5 (*** Autour du jeu *Dobble*)**.** Il y a 55 cartes et un ensemble de symboles, qu'on notera S_8 par la suite. Les cartes respectent deux règles :

1. Sur chaque carte sont représentes huit symboles différents de l'ensemble S_8.

2. Deux cartes possèdent toujours un unique symbole en commun.

Combien de symboles contient S_8 ?

On peut faire un travail méticuleux en inspectant les cartes une à une et en dressant une liste. Mais il faut aller plus loin, vers une compréhension plus profonde de la configuration formée par les cartes et les symboles.

Si on construit un jeu avec seulement trois symboles sur chaque carte, quel est le nombre maximal de cartes dans le jeu ? Et quel est le nombre de symboles dans le jeux (i.e. le cardinal de l'ensemble S_3) ?

Même question en remplaçant 3 par 4.

Que remarquez-vous dans ces deux situations plus simples.

Questions.

1. Est-ce que le jeu *Dobbles* (celui que vous utilisez, par exemple) est complet ? Est-ce qu'il manque des cartes ? Si *oui*, combien (et lesquelles) ? Si *non*, faites une connexion avec les deux cas plus simples traiter plus haut.

2. Si on construit un jeu avec neuf (ou k) symboles sur chaque carte, quel est le nombre maximal de cartes qu'on peut avoir dans le jeu ? Et le nombre de symboles dans l'ensemble S_k ?

3. Peut-on faire une liaison entre la configuration du jeux (les deux règles) et la géométrie plane ?

Sujet 6 (* Polygones en polygones)**.** On se donne un polygone convexe P ayant n côtés. On veut trouver le nombre de polygones convexes à k côtés respectant les deux règles suivantes :

1. Les sommets du polygone sont des sommets du polygone P.

2. Toute côté du polygone à construire n'est pas un coté du polygone P.

Questions. Étudier des cas particuliers : $n = 5, 6, 7$ et $k = 3$. Puis $n = 7, 8$ et $k = 4$. Enfin, essayer le cas général n et $k = 3$ etc.

Sujet 7 (** Des cordes et des cercles)**.** On considère 8 points sur un cercle. On dessine quatre cordes qui relient deux à deux les 8 points. On appelle une telle configuration *libre* si aucune paire de cordes ne s'intersectent à l'intérieur du cercle.

Questions.

1. Combien existe-t-il de configurations libres ?

2. Que se passe-t-il pour 20 points et 10 cordes ?

3. Résoudre le problème dans le cas général quand il y a $2n$ points et n cordes.